Álgebra Lineal - UNCuyo - 2021

Trabajo Práctico 1

1.A Rudimentos de lógica matemática.

1. Indique cuáles de las siguientes oraciones son *proposiciones*.

   a) 1024 es el número más pequeño de cuatro dígitos que es un cuadrado perfecto.
   b) Ella es una matemática importante.
   c) $128 = 2^6$.
   d) $x = 2^6$.
   e) ¿Es 2 un número positivo?
   f) $x^2 + x + 1 = 0$.
   g) Estudiá lógica.
   h) Si los precios de las acciones caen, perderé dinero.

2. Sea p la proposición *DATAENDFLAG está off*, q la proposición *ERROR es igual a 0* y r la proposición *SUM es menor que 1000*. Expresa las siguientes oraciones en notación simbólica.

   a) *DATAENDFLAG está off*, *ERROR es igual a 0*, y *SUM es menor que 1000.*
   b) *DATAENDFLAG está off* pero *ERROR es diferente de 0.*
   c) *DATAENDFLAG está off*; sin embargo, *ERROR no es igual a 0* o *SUM es mayor o igual que 1000.*
   d) *DATAENDFLAG está on* y *ERROR es igual a 0* pero *SUM es mayor o igual que 1000.*
   e) *DATAENDFLAG está on* o estamos en el caso de que: *ERROR es igual a 0* y *SUM es menor que 1000.*

3. Construir una tabla de verdad para las siguientes proposiciones:

   a) $(\neg p \vee q) \to \neg q$.
   b) $\neg p \wedge q$.
   c) $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge q) \to q$.
   d) $p \wedge (q \wedge r)$.
   e) $(p \vee \neg q) \to r$.
   f) $\neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$.
   g) $\neg p \vee q \to r$.
   h) $(p \vee \neg r) \leftrightarrow (q \vee r)$.
   i) $p \wedge (\neg q \vee r)$.
   j) $(p \to r) \leftrightarrow (q \to r)$.
   k) $(p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to r)$.

4. Llene la cuadrícula de modo que cada fila, columna y cuadro 2×2 contiene las letras M, A, T, H, sin repeticiones.

a)

A			
	M		
T			M
		H	

b)

T			
		A	
	M		
			H

5. *i)* Determine si las formas proposicionales siguientes son lógicamente equivalentes. En cada caso, construye una tabla de verdad e incluye una oración que justifique tu respuesta. Tu oración debe demostrar que entiendes el significado de equivalencia lógica.

   a) $p \vee (p \wedge q)$ y p.
   b) $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \wedge \neg q$.
   c) $p \vee T$ y T.
   d) $p \wedge T$ y p.
   e) $p \wedge F$ y $p \vee F$.
   f) $(p \wedge q) \wedge r$ y $p \wedge (q \wedge r)$.

   ii) Determine si las siguientes formas proposicionales son lógicamente equivalentes:

$$p \to (q \to r) \quad \text{y} \quad (p \to q) \to r.$$

   ¿Qué propiedad es la que se está verificando en este ejercicio?

   iii) Utilice tablas de verdad para verificar las siguientes equivalencias lógicas.

   a) $p \to q \equiv \neg p \vee q$.
   b) $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$.
   c) $p \to (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \to r$.
   d) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
   e) $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$.

6. Encuentre el valor de verdad de cada proposición

   i) si p y r son verdaderas y q es falsa:

   a) $\neg p \wedge \neg q$.
   b) $(\neg p \vee q) \wedge r$.
   c) $p \vee q \vee r$.
   d) $\neg(p \vee q) \wedge r$.
   e) $\neg p \wedge (q \vee r)$.
   f) $p \wedge (\neg(q \vee \neg r))$.
   g) $(r \wedge \neg q) \vee (p \vee r)$.
   h) $(q \wedge r) \wedge (p \vee \neg r)$.

   ii) si p y q son verdaderas y r, s y t son falsas:

   a) $\neg(p \to q)$.
   b) $(\neg p) \to r$.
   c) $(p \to s) \wedge (s \to t)$.
   d) $t \to (\neg q)$.
   e) $(\neg q) \to (r \to (r \to (p \vee s)))$.
   f) $p \to (r \to q)$.
   g) $(q \to (r \to s)) \wedge ((p \to s) \to (\neg t))$.
   h) $(r \wedge s \wedge t) \to (p \vee q)$.

   iii) Supongamos que p y q son proposiciones tales que $p \to q$ es falsa. Encuentre los valores de verdad de cada uno de los siguientes:

   a) $\neg p \to q$.
   b) $p \vee q$.
   c) $q \to p$.

7. *i)* Utilice las propiedades de *De Morgan* para escribir negaciones de las siguientes p roposiciones.

   a) Matías estudia matemáticas y la hermana de Matías estudia ciencias de la computación.
   b) Samuel es cinturón naranja y Milagros es cinturón rojo.
   c) El conector está suelto o la máquina está desenchufada.
   d) El tren llega tarde o mi reloj está adelantado.
   e) Este programa informático tiene un error lógico enlas primeras diez líneas o se está ejecutando con un conjunto de datos incompleto.
   f) El dólar está en un máximo histórico y el mercado de valores está en un mínimo histórico.

ii) Suponga que x es un número real particular y utilice las propiedades de De Morgan para escribir negaciones para las siguientes proposiciones:

a) $-2 < x < 7$.
b) $x < 2$ o $x > 5$.
c) $1 > x \geqslant -3$.
d) $-10 < x < 2$.
e) $x \leqslant -1$ o $x > 1$.
f) $0 > x \geqslant -7$.

8. *i*) Reescribe las afirmaciones siguientes en la forma *Si ..., entonces ...*

   a) Este bucle se repetirá exactamente N veces si no contiene un *stop* o un *go to*.
   b) Llego a tiempo al trabajo si tomo el micro de las $8:05$.
   c) Quédate quieto o dispararé.
   d) Arregla mi techo o no pagaré el alquiler.

   ii) Para los siguientes ítems:

   a) Si P es un cuadrado, entonces P es un rectángulo.
   b) Si hoy es la noche de año nuevo, entonces mañana es enero.
   c) Si la expansión decimal de r termina, entonces r es racional.
   d) Si n es primo, entonces n es impar o n es 2.
   e) Si x no es negativo, entonces x es positivo o x es nulo.
   f) Si Sergio es el padre de Ana, entonces Juan es su tío y Susana es su tía.
   g) Si n es divisible por 6, entonces n es divisible por 2 y n es divisible por 3.
      - Escribir las negaciones para cada una de las siguientes proposiciones.
      - Escribir las contrarecíprocas para cada una de las siguientes proposiciones.
      - Escribir las recíprocas para cada una de las siguientes proposiciones.
      - Escribir las contrarias para cada una de las siguientes proposiciones.

      (Supongamos que todas las variables representan cantidades o entidades fijas, según corresponda).

9. Indique cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas. Justificar sus respuestas de forma adecuada.

   a) Todo número entero es un número real.
   b) 0 es un número real positivo.
   c) Para todo número real r, $-r$ es un número real negativo.
   d) Todo número real es un número entero.

10. Sea $Q(x, y)$ la función proposicional *Si* $x < y$*, entonces* $x^2 < y^2$, con dominio para x e y el conjunto, $\mathbb{R}$, de números reales.

   a) Explicar por qué $Q(x, y)$ es falsa si $x = -2$ e $y = 1$.
   b) Dé valores diferentes de los del inciso 10*a* para los cuáles $Q(x, y)$ es falsa.
   c) Explicar por qué $Q(x, y)$ es verdadera si $x = 3$ e $y = 8$.
   d) Dé valores diferentes de los del inciso 10*c* para los cuáles $Q(x, y)$ es verdadera.

11. *i*) Sea $\mathcal{C}_3$ el conjunto de todas las cadenas de longitud 3 que consisten en a, b y c. Enumere todas las cadenas en $\mathcal{C}_3$ que cumplan las siguientes condiciones:

   a) Toda cadena en $\mathcal{C}_3$ que comience con b.
   b) Toda cadena en $\mathcal{C}_3$ que tenga más de una c.

ii) Sea $\mathcal{T}_3$ el conjunto de todas las cadenas de longitud 3 que constan de ceros y unos. Enumere todas las cadenas en $\mathcal{T}_3$ que cumplan las siguientes condiciones:

a) Toda cadena s en $\mathcal{T}_3$, tal que el segundo carácter de s es 1 o los dos primeros caracteres de s son iguales.

b) Toda cadena en $\mathcal{T}_3$ que tenga los tres caracteres iguales.

12. Encuentre contraejemplos para mostrar que las afirmaciones siguientes son falsas.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant \dfrac{1}{x}$.

b) $\forall a \in \mathbb{Z}, \dfrac{a-1}{a} \in \mathbb{Z}$.

c) Para todo par de enteros positivos m y n, se tiene que $m \cdot n \geqslant m + n$.

d) Para todo par de números reales positivos x e y, se tiene que $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

13. Considere el siguiente enunciado:

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 = 2.$$

¿Cuáles de las siguientes son formas equivalentes de expresar este enunciado?

a) El cuadrado de cada número real es 2.

b) Existen números reales que tienen cuadrado 2.

c) El número x tiene cuadrado 2, para algún número real x.

d) Algún número real tiene cuadrado 2.

e) Existe al menos un número real cuyo cuadrado es 2.

14. El siguiente ejercicio es un acertijo típico y muy usado en entrevistas para *programadores*, ya que te hace razonar en cierta forma como se espera lo haría un programador.

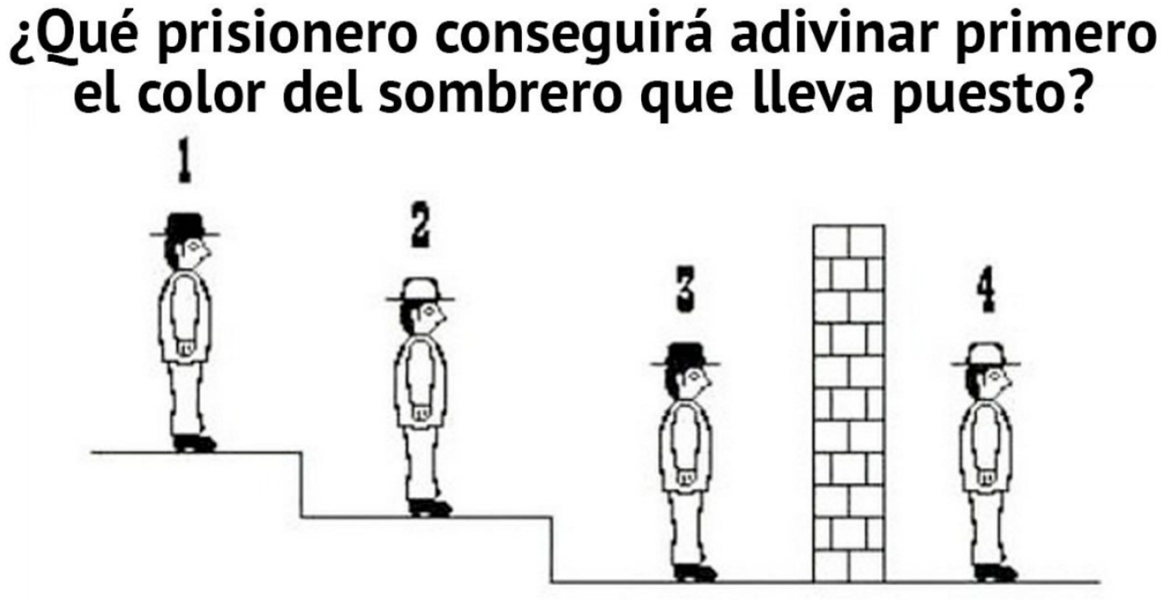
En una prisión prometen la libertad para el prisionero que sea capaz de adivinar, con total seguridad, cual es el color de su sombrero. Los prisioneros están situados de la siguiente forma: tres en una escalera y solo pueden ver a los que tienen delante, y un cuarto detrás de un muro al que nadie puede ver y él tampoco puede ver a nadie. Las pistas que se les da a los prisioneros son las siguientes:

- Los cuatro tienen un sombrero de color blanco o negro en la cabeza.
- Dos de ustedes tienen un sombrero blanco y los otros dos un sombrero negro.

Si sabemos que:

- Todos los prisioneros tienen sombrero.
    - **Prisionero 1** sombrero negro;
    - **Prisionero 2** sombrero blanco;
    - **Prisionero 3** sombrero negro;
    - **Prisionero 4** sombrero blanco.
- Lógicamente, los prisioneros, no pueden girar ni mirar hacia atrás ni hacia los lados. Solo pueden ver hacia adelante.
- Por lo tanto, el **Prisionero 1** puede ver a los **Prisioneros 2** y **3** pero no al **4**.
- El **Prisionero 2** puede ver al **Prisionero 3** pero no a los **Prisioneros 1** y **4**.
- Los **Prisioneros 3** y **4** no pueden ver a nadie.

¿Cuál de los prisioneros sabrá el color de su sombrero sabiendo todo lo anterior?



15. *i*) ¿Cuál de las siguientes oraciones es una negación de *Todos los estudiantes de álgebra son deportistas*? Más de una respuesta puede ser correcta.

    a) Hay un estudiante de álgebra que no es deportista.

    b) Todos los estudiantes de álgera son no deportistas.

    c) Hay una persona deportista que no es un estudiante de álgebra.

    d) Ningún estudiante de álgebra es deportista.

    e) Algunos estudiantes de álgebra no son deportistas.

    f) Ninguna persona deportista es estudiante de álgebra.

    ii) Escribe una negación para cada proposición:

    a) Para todo real number x, si $x > 3$ entonces $x^2 > 9$.

    b) Para todo programa de computación P, si P compila sin mensajes de error entonces P es correcto.

16. Sea $D = \{-48, -14, -8, 0, 1, 3, 16, 23, 26, 32, 36\}$. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Proporcionar contraejemplos de las afirmaciones que son falsas.

    a) $\forall x \in D$, si x es impar entonces $x > 0$.

    b) $\forall x \in D$, si x es menor que 0 entonces x es par.

    c) $\forall x \in D$, si x es par entonces $x \leqslant 0$.

    d) $\forall x \in D$, si el dígito de las unidades de x es 2 entonces el dígito de las decenas es 3 o 4.

    e) $\forall x \in D$, si el dígito de las unidades de x es 6 entonces el dígito de las decenas es 1 o 2.

17. Escribir una negación para cada proposición.¿Son proposiciones verdaderas o falsas?

    a) Para todo número real x, si $x^2 \geqslant 1$ entonces $x > 0$.
    b) Para todo entero d, si $6/d$ es un entero entonces $d = 3$.
    c) $\forall x \in \mathbb{R}$, si $x(x+1) > 0$ entonces $x > 0$ o $x < -1$.
    d) $\forall n \in \mathbb{Z}$, si n es primo entonces n es impar o $n = 2$.
    e) Para todos los enteros a, b y c, si $a - b$ es par y $b - c$ es par entonces $a - c$ es par.
    f) Para todo entero n, si n es divisible por 6 entonces n es divisible por 2 y n es divisible por 3.
    g) Si el cuadrado de un número entero es impar, entonces el número entero es impar.
    h) Si una función es derivable, entonces es continua.

Ejercicios sugeridos 1e, 2c, 3g, 5ii, 5iiia, 6ia, 6iiia, 7ie, 6iid, 8ib, 8iid, 9b, 10d, 11ib, 11iia, 12d, 13b, 15iib, 17b y 17f.

1.B Una introducción a la combinatoria y al principio de inducción matemática.

1. Desarrollar y simplificar las siguientes sumatorias y productorias:

    a) $\sum_{k=1}^{5} k$
    b) $\sum_{j=1}^{3} 2^j$
    c) $\sum_{i=0}^{2} (3i-1)$
    d) $\sum_{n=2}^{5} 3$
    e) $\sum_{h=-2}^{4} 2^h$
    f) $\sum_{k=1}^{5} a_k b_k$
    g) $\prod_{k=1}^{5} k$
    h) $\prod_{j=1}^{3} 2^j$
    i) $\prod_{i=0}^{2} (3i-1)$
    j) $\prod_{n=2}^{5} 3$
    k) $\prod_{n=1}^{5} (-1)^n (n+1)$
    l) $\prod_{j=2}^{4} a^j (b+j)$

2. Expresar las siguientes sumas y multiplicaciones usando el símbolo de sumatoria y productoria respectivamente:

    a) $\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{16}$
    b) $1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} + \frac{1}{125}$
    c) $\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 + 3 + 9$
    d) $a^4b^0 + a^3b^1 + a^2b^2 + a^1b^3 + a^0b^4$
    e) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{21}$
    f) $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{10}{20}$
    g) $(-3)4(-5)6(-7)8(-9)$
    h) $(c-2)(c-1)c(c+1)(c+2)(c+3)$

3. Expresar los siguientes productos utilizando factoriales:

    a) $11 \cdot 10 \cdot 9$
    b) $(r+2)(r+1)r(r-1)$
    c) 254
    d) $(c-2)(c-1)c(c+1)(c+2)(c+3)$

4. En los siguientes ejercicios aplicar el *Teorema del Binomio*.

    a) Determinar

        1) el quinto término del desarrollo de $\left(2a - \frac{b}{3}\right)^8$.

2) el séptimo término y el término central del desarrollo de $\left(\frac{4x}{5} + \frac{5}{2x}\right)^9$.

3) los dos términos centrales del desarrollo de $\left(\frac{x^{3/2}}{a^{1/2}} - \frac{y^{5/2}}{b^{3/2}}\right)^8$.

4) el quinto término del desarrollo de $\left(\frac{a}{3} + 9b\right)^{10}$.

b) ¿Cuál es el coeficiente de x^2 que aparece en el desarrollo de:

$$\left(\frac{5}{3}x^3y^4 - \frac{1}{xy^2}\right)^{14} ?$$

c) Determinar el coeficiente de x^32 y el de x^{-17} que aparece en el desarrollo

$$\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$$

5. Determine la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes igualdades:

a) $\sum_{k=0}^{51} 4 = 4 \cdot 51 = 204$

b) $\sum_{k=2}^{23} 7 = 7 \cdot 22 = 154$

c) $\sum_{k=1}^{5} a_k + 3b_k = \sum_{k=1}^{5} a_k + 3\sum_{k=1}^{5} b_k$

d) $\sum_{k=1}^{5} a_kb_k = \left(\sum_{k=1}^{5} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{5} b_k\right)$

e) $\prod_{k=5}^{26} (a-2) = (a-2)^22$

f) $\prod_{k=1}^{12} 5 = 5 \cdot 12 = 60$

g) $\prod_{k=1}^{5} (a_k + b_k) = \prod_{k=1}^{5} a_k + \prod_{k=1}^{5} b_k$

h) $\prod_{k=1}^{5} a_k \cdot b_k = \left(\prod_{k=1}^{5} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{5} b_k\right)$

6. Probar por inducción las siguientes igualdades:

a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = 1 + (n-1) \cdot 2^n$

e) $\left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$

f) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n}$

g) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = 2\binom{n+2}{3}$

Ejercicios sugeridos 1*b*, 1*i*, 2*a*, 2*e*, 4*a*1, 4*b*, 5*b*, 5*g*, 6*a* y 6*e*.

1.C Números complejos.

1. Expresar los siguientes números complejos en forma binómica, $a + bi$:

   a) $(2+3i) + \overline{(-1+2i)}$
   b) $(-1+i)(3-2i)$
   c) $(1+i)(1-i)$
   d) $\dfrac{1}{i}$
   e) $\dfrac{1}{1-i}$
   f) $\dfrac{3-i}{2+\sqrt{2}i}$
   g) $\dfrac{11-i}{11+i}$
   h) $\dfrac{1+i}{1+2i} + \overline{\dfrac{1+i}{1-2i}}$
   i) $\left(\dfrac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right)^5$
   j) $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i}$
   k) $\dfrac{1-i}{1+i}$
   l) $i^{13} - i^{9}$
   m) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$
   n) $(-1+i)^{15}$
   ñ) $\dfrac{1+ri}{2r+(r^2-1)i}, r \in \mathbb{R}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones sobre el cuerpo de los complejos:

   a) $2iz = 3-i$
   b) $(1-i)\overline{z} = 1-2i$
   c) $(1-i)(z+i) = 2+i$
   d) $(2-3i)(z+i)+(1-2i)(z-1+2i) = 1+4iz$

3. Hallar el módulo de los siguientes números complejos:

   a) -1
   b) $-1-i$
   c) i^{17}
   d) $\dfrac{2-i}{i-2}$
   e) $\dfrac{2}{1-i\sqrt{2}}$
   f) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
   g) $\dfrac{|1-i|-i}{|1-i|+i}$

4. Expresar los siguientes complejos en la forma polar y exponencial, $r\left[\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right]$ y $re^{i\theta}$:

   a) -1
   b) $-1-i$
   c) $\sqrt{3}-i$
   d) $i^{13} - i^{8}$
   e) $4+5i$

5. Completar las siguientes afirmaciones de forma tal de obtener proposiciones verdaderas:

   a) Si $z = (1+i)^2$, entonces $\mathfrak{Re}(z) = \ldots$.
   b) Si $z = (2+3i)(1+i)$, entonces $\mathfrak{Im}(z) = \ldots$.
   c) Si $z = \dfrac{(1+i)^2}{|1-i|}$, entonces $\mathfrak{Im}(z) = \ldots$.
   d) Si $z = \dfrac{(1+i)^2}{|1-i|}$, entonces $\mathfrak{Re}(z) = \ldots$.
   e) Si $(3+i)z = \overline{(1+2i}$, entonces la forma binomial de $z = \ldots$.
   f) Si $(3+i)z = \overline{(4+i}$, entonces la forma binomial de $z = \ldots$.

6. Resolver la ecuación $z^n = w$ en cada casoResolver la ecuación $z^n = w$ en cada caso:

   a) $w = i, n = 4$
   b) $w = 1+i, n = 6$
   c) $w = 1+\sqrt{3}i, n = 5$
   d) $w = 1-\sqrt{3}i, n = 8$
   e) $w = \sqrt{3}-i, n = 6$
   f) $w = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}, n = 8$

Ejercicios sugeridos 1c, 1f, 1j, 2b, 3b, 4b, 5b, 5e, 6a y 6e.