Análisis Matemático I
Clase 2: Clasificación de funciones (continuación) y operaciones con funciones

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2024

Objetivos de la clase 2:

Continuamos con el objetivo anterior:
Se espera que el estudiante comprenda la noción de función y comience a describir y analizar distintas funciones elementales desde enfoques geométricos y analíticos.

Función valor absoluto

La función $|\cdot|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

se denomina función valor absoluto.

Realizar gráfico.

Observación: la función valor absoluto es un ejemplo de una función definida por partes. Veamos otro ejemplo: graficar la siguiente función definida por partes

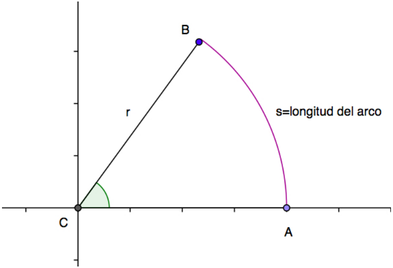
$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Medición y orientación de ángulos

Medida en radianes

Sea ACB el ángulo que se desea medir. Sea r el radio de la circunferencia y s la longitud del arco determinado por el ángulo sobre la circunferencia. La medida del ángulo ACB en radianes es el cociente:

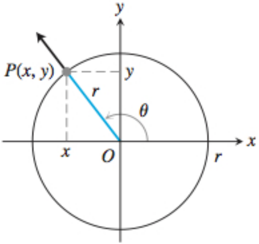
$$\frac{s}{r}.$$



Ejemplos: ángulos de un giro, de medio giro, etc. Recordar signos de ángulos (sentido horario y antihorario).

Funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas: suponemos $x \neq 0$ y $y \neq 0$.

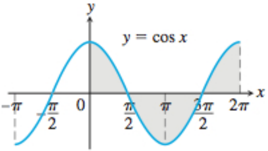


seno:	$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$	**cosecante:**	$\csc\theta = \dfrac{r}{y}$
coseno:	$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$	**secante:**	$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$
tangente:	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$	**cotangente:**	$\cot\theta = \dfrac{x}{y}$

Tarea: repasar páginas 25, 26, 27 y 28 del libro de texto (identidades trigonométricas y transformaciones de funciones trigonométricas.)

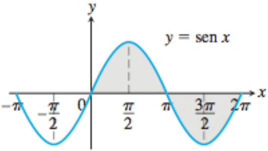
Gráficas de funciones trigonométricas

Funciones trigonométricas



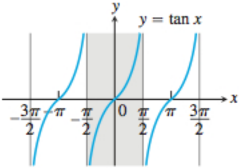
Dominio: $-\infty < x < \infty$
Rango: $-1 \leq y \leq 1$
Periodo: 2π

(a)



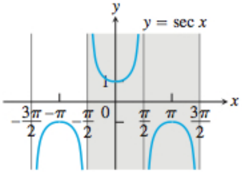
Dominio: $-\infty < x < \infty$
Rango: $-1 \leq y \leq 1$
Periodo: 2π

(b)



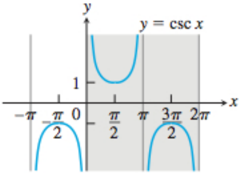
Dominio: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Rango: $-\infty < y < \infty$
Periodo: π

(c)



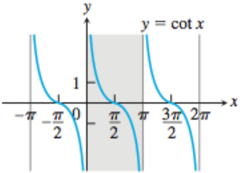
Dominio: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Rango: $y \leq -1$ o $y \geq 1$
Periodo: 2π

(d)



Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Rango: $y \leq -1$ o $y \geq 1$
Periodo: 2π

(e)



Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Rango: $-\infty < y < \infty$
Periodo: π

(f)

Operaciones con funciones.

Operaciones con funciones: sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y $g : D(g) \to \mathbb{R}$ dos funciones. Entonces definimos nuevas funciones:

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{(función suma)}$$

Operaciones con funciones.

Operaciones con funciones: sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y $g : D(g) \to \mathbb{R}$ dos funciones. Entonces definimos nuevas funciones:

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{(función suma)}$$

$$f - g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{(función diferencia)}$$

Operaciones con funciones.

Operaciones con funciones: sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y $g : D(g) \to \mathbb{R}$ dos funciones. Entonces definimos nuevas funciones:

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{(función suma)}$$

$$f - g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{(función diferencia)}$$

$$f.g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f.g)(x) = f(x).g(x) \quad \text{(función multiplicación)}$$

Operaciones con funciones.

Operaciones con funciones: sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y $g : D(g) \to \mathbb{R}$ dos funciones. Entonces definimos nuevas funciones:

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{(función suma)}$$

$$f - g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{(función diferencia)}$$

$$f.g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f.g)(x) = f(x).g(x) \quad \text{(función multiplicación)}$$

La función división f/g tiene por dominio el conjunto:

$$D(f/g) = \{x \in D(f) \cap D(g) : g(x) \neq 0\}$$

y se obtiene mediante división:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad x \in D(f/g).$$

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$. Determine el dominio de $f + g$ y f/g.
Solución: para determinar el dominio de $f + g$, primero determinamos el dominio $D(f)$ de f y el de g, $D(g)$.

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$. Determine el dominio de $f+g$ y f/g.
Solución: para determinar el dominio de $f+g$, primero determinamos el dominio $D(f)$ de f y el de g, $D(g)$. El dominio de f es:

$$D(f) = [0, +\infty)$$

y el de g:

$$D(g) = (-\infty, 1].$$

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$. Determine el dominio de $f+g$ y f/g.
Solución: para determinar el dominio de $f+g$, primero determinamos el dominio $D(f)$ de f y el de g, $D(g)$. El dominio de f es:

$$D(f) = [0, +\infty)$$

y el de g:

$$D(g) = (-\infty, 1].$$

Luego:

$$D(f+g) = D(f) \cap D(g) = [0, 1].$$

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$. Determine el dominio de $f + g$ y f/g.

Solución: para determinar el dominio de $f + g$, primero determinamos el dominio $D(f)$ de f y el de g, $D(g)$. El dominio de f es:

$$D(f) = [0, +\infty)$$

y el de g:

$$D(g) = (-\infty, 1].$$

Luego:

$$D(f+g) = D(f) \cap D(g) = [0, 1].$$

Por otro lado, para determinar el dominio de f/g se deben excluir de $D(f) \cap D(g)$ los puntos donde el denominador se anula (en este caso $x = 1$):

$$D(f/g) = [0, 1).$$

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, determine $D(f/g)$ y escriba la fórmula para $(f/g)(x)$.

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, determine $D(f/g)$ y escriba la fórmula para $(f/g)(x)$.
Solución: primero tenemos

$$D(f) = (-\infty, 1]$$

y:

$$D(g) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, determine $D(f/g)$ y escriba la fórmula para $(f/g)(x)$.

Solución: primero tenemos

$$D(f) = (-\infty, 1]$$

y:

$$D(g) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Entonces $D(f) \cap D(g) = (-\infty, 0) \cup (0, 1]$ y debemos excluir de esta intersección los puntos donde el denominador, es decir g, se anula.

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$, determine $D(f/g)$ y escriba la fórmula para $(f/g)(x)$.
Solución: primero tenemos

$$D(f) = (-\infty, 1]$$

y:

$$D(g) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Entonces $D(f) \cap D(g) = (-\infty, 0) \cup (0, 1]$ y debemos excluir de esta intersección los puntos donde el denominador, es decir g, se anula. Como g es siempre distinta de cero, se tiene:

$$D(f/g) = (-\infty, 0) \cup (0, 1]$$

y:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\frac{1}{x^2}} = x^2\sqrt{1-x}.$$

Advertencia: próxima diapositiva.

Operaciones con funciones, ejemplos.

Advertencia: para determinar el dominio de $f+g$, $f.g$ o f/g no se debe mirar la fórmula:

$$(f+g)(x), \quad (f.g)(x) \quad \text{o} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

sino que se deben analizar los dominios aplicando la definición de cada operación como en los ejemplos anteriores. Por ejemplo, en el último caso:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x^2\sqrt{1-x},$$

con dominio:

$$D(f/g) = (-\infty, 0) \cup (0, 1].$$

Sin embargo, si hubiésemos mirado la fórmula final, habríamos dicho que el dominio es:

$$(-\infty, 1]$$

lo cual es erróneo, ya que g no está definida en 0 y por lo tanto no es posible hacer la división.

Composición de funciones

Sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y $g : D(g) \to \mathbb{R}$ dos funciones. Definimos la composición de f con g como la función $f \circ g : D(f \circ g) \to \mathbb{R}$ con dominio:

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\}$$

y cuyas imágenes se obtienen mediante la fórmula:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad x \in D(f \circ g).$$

Hacer diagramas de Venn para ilustrar el dominio de la composición.

Composición de funciones.

Ejemplo: determine el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$ siendo $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Además, escriba la expresión de $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

Composición de funciones.

Ejemplo: determine el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$ siendo $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Además, escriba la expresión de $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.
Solución: vamos a determinar el dominio de $f \circ g$. Por definición, un número x pertenece al dominio de $f \circ g$ si y solo si x pertenece al dominio de g y $g(x)$ está en el dominio de f. El dominio de g es:

$$D(g) = [0, +\infty)$$

y el dominio de f es:

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

Así, cualquier $x \in [0, +\infty)$ cumple $g(x) \in D(f)$. Luego:

$$D(f \circ g) = [0, +\infty).$$

Finalmente:

$$(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x, \quad x \in [0, +\infty).$$

Obsrevación: la función $f \circ g$ difiere de la función identidad $h(x) = x$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$, pues g exige que x sea no negativa.

Ejercicios complementarios: dadas

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ y } g(x) = x + 1,$$

determine el dominio y la expresión de cálculo de:

1. $f \circ f$
2. $f \circ g$
3. $g \circ f$

Observación: con lo visto en la clase de hoy puede hacer todos los ejercicios de la sección Funciones del TP1.