Álgebra (LCC)
Unidad 1 - Fundamentos

Licenciatura en Ciencias de la Computación
FING - UNCuyo

Conceptos

1. Rudimentos de Lógica Matemática
   - a. Proposiciones & Conectivos Lógicos I
   - b. Equivalencias Lógicas & Conectivos Lógicos II
   - c. Cuantificador Universal & Cuantificador Existencial
2. Combinatoria y el Principio de Inducción Matemática: una introducción
   - a. Número Combinatorio y El Teorema del Binomio
   - b. El Principio de Inducción
3. Números complejos
   - a. Álgebra de los Números Complejos
   - b. Forma Polar y Exponencial
   - c. Fórmula de Moivre

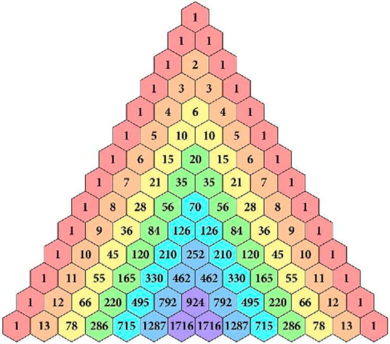
Conceptos

Conceptos

Conceptos

Conceptos

Conceptos


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

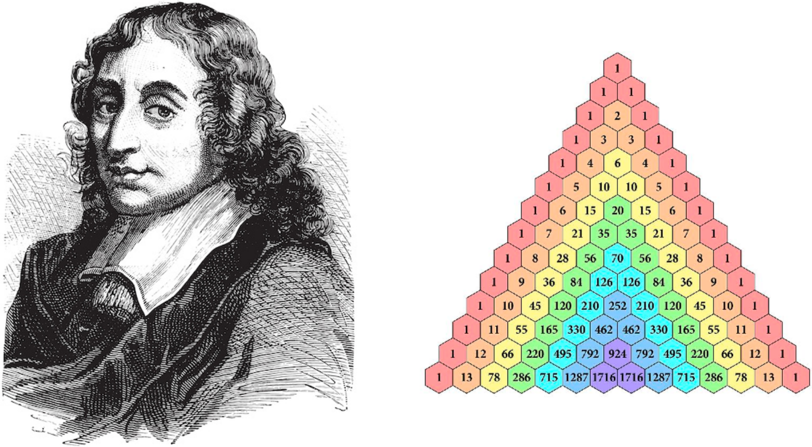


Figura: Blaise Pascal $1623 - 1662$.

Conceptos

1. Rudimentos de Lógica Matemática
2. Combinatoria y el Principio de Inducción Matemática: una introducción
   a. Número Combinatorio y El Teorema del Binomio
   b. El Principio de Inducción
3. Números complejos

DEFINICIÓN INFORMAL (SUMATORIA)

Para la siguiente suma:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$

usaremos la letra griega sigma mayúscula, $\sum$, para poder expresar la suma anterior de una forma compacta hacemos

$$\sum_{\underbrace{k=1}} ^{n} a_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

k es el índice (o variable) que toma valores (en este caso) desde el valor inicial 1 hasta el valor final n.

Al término a_k se lo denomina término genérico de la sumatoria.

EJEMPLO (SUMATORIA I)

Expresar $1+3+5+7+9+11+13$ como sumatoria.

Solución

Notemos que estamos sumando número impares y podemos escribir

$$\begin{aligned} 1+3+5+7+9+11+13 = \\ & (2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+(2\cdot 3-1) \\ & \quad +(2\cdot 4-1)+(2\cdot 5-1)+(2\cdot 6-1)+(2\cdot 7-1) \end{aligned}$$

por lo tanto podemos hacer variar el índice k de $k=1$ a $n=7$ y vemos que el término genérico es $(2\cdot k-1)$. Así:

$$1+3+5+7+9+11+13=\sum_{k=1}^{7}(2\cdot k-1)$$

Ejemplo (Sumatoria II)

Expresar $1+2+4+8+16+32$ como sumatoria.

Solución

Notemos que

$$1+2+4+8+16+32 = 2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5$$

por lo tanto podemos hacer variar el índice k de $k=0$ a $n=5$ y vemos que el término genérico es 2^k. Así:

$$1+2+4+8+16+32 = \sum_{k=0}^{5} 2^k$$

EJEMPLO (SUMATORIA III)

Expresar $\dfrac{1}{ax-1}+\dfrac{1}{2ax-1}+\dfrac{1}{3ax-1}+\dfrac{1}{4ax-1}$ como sumatoria.

Solución

Podemos hacer variar el índice k de $k=1$ a $n=4$ y vemos que el término genérico es $\dfrac{1}{kax-1}$. Así:

$$\frac{1}{ax-1}+\frac{1}{2ax-1}+\frac{1}{3ax-1}+\frac{1}{4ax-1}=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{kax-1}$$

EJEMPLO (SUMATORIA IV)

Desarrollar la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=-2}^{3} a^{2i-b}.$$

Solución Reemplazando el índice i por $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ tenemos que:

$$\sum_{i=-2}^{3} a^{2i-b} = a^{-4-b} + a^{-2-b} + a^{-b} + a^{2-b} + a^{4-b} + a^{6-b}$$

PROPIEDADES (SUMATORIA)

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c,$ con $c \in \mathbb{R}$ una constante;
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k,$ con $c \in \mathbb{R}$ una constante;
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.$

EJEMPLO (PROPIEDADES SUMATORIA)

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} 8 = 7 \cdot 8 = 56;$
2. $\displaystyle\sum_{k=-2}^{8} -4\pi = 11(-4\pi) = -44\pi;$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{23} \operatorname{sen}(2) \cdot k^2 = \operatorname{sen}(2) \cdot \sum_{k=1}^{23} k^2;$
4. $\displaystyle\sum_{j=3}^{9} (j + 2^j) = \sum_{j=3}^{9} j + \sum_{j=3}^{9} 2^j;$
5. $\displaystyle\sum_{i=-5}^{3} \left(2 \cdot j^3 - 5 \cdot 3^j\right) = 2 \cdot \sum_{i=-5}^{3} j^3 - 5 \sum_{i=-5}^{3} 3^j.$

TAREA Cálcular todas las sumatorias.

DEFINICIÓN INFORMAL (PRODUCTORIA)

Para el siguiente producto:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n,$$

usaremos la letra griega pi mayúscula, $\prod$, para poder expresar el producto anterior de una forma compacta hacemos

$$\prod_{\underbrace{k=1}}^{n} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

k es el índice (o variable) que toma valores (en este caso) desde el valor inicial 1 hasta el valor final n.

Al término a_k se lo denomina término genérico de la productoria.

EJEMPLO (PRODUCTORIA I)

Expresar $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13$ como productoria.

Solución

Notemos que estamos multiplicando número impares y podemos escribir

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \\ & \qquad = (2 \cdot 1 - 1) \cdot (2 \cdot 2 - 1) \cdot (2 \cdot 3 - 1) \\ & \qquad\qquad \cdot (2 \cdot 4 - 1) \cdot (2 \cdot 5 - 1) \cdot (2 \cdot 6 - 1) \cdot (2 \cdot 7 - 1) \end{aligned}$$

por lo tanto podemos hacer variar el índice k de $k = 1$ a $n = 7$ y vemos que el término genérico es $(2 \cdot k - 1)$. Así:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 = \prod_{k=1}^{7} (2 \cdot k - 1)$$

Ejemplo (Productoria II)

Expresar $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32$ como productoria.

Solución

Notemos que

$$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5$$

por lo tanto podemos hacer variar el índice k de $k = 0$ a $n = 5$ y vemos que el término genérico es 2^k. Así:

$$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 = \prod_{k=0}^{5} 2^k$$

EJEMPLO (PRODUCTORIA III)

Expresar $\dfrac{3}{c^2} \cdot \dfrac{5}{c^4} \cdot \dfrac{7}{c^8} \cdot \dfrac{9}{c^{16}}$ como productoria.

Solución

Podemos hacer variar el índice k de $k = 1$ a $n = 4$ y vemos que el término genérico es $\dfrac{2k+1}{c^{2^k}}$. Así:

$$\frac{3}{c^2} \cdot \frac{5}{c^4} \cdot \frac{7}{c^8} \cdot \frac{9}{c^{16}} = \prod_{k=1}^{4} \frac{2k+1}{c^{2^k}}$$

EJEMPLO (PRODUCTORIA IV)

Desarrollar la siguiente productoria:

$$\prod_{i=-2}^{3} a^{2ib}.$$

Solución Reemplazando el índice i por $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ tenemos que:

$$\prod_{i=-2}^{3} a^{2i-b} = a^{-4b} \cdot a^{-2b} \cdot a^{0} \cdot a^{2b} \cdot a^{4b} \cdot a^{6b}$$

PROPIEDADES (PRODUCTORIA)

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} c = c^n$, con $c \in \mathbb{R}$ una constante;
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c^n \cdot \prod_{k=1}^{n} a_k$, con $c \in \mathbb{R}$ una constante;
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (a_k \cdot b_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k \cdot \prod_{k=1}^{n} b_k$.

EJEMPLO (Propiedades Productoria)

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{7} 8 = 8^7 = 2097152;$
2. $\displaystyle\prod_{k=-5}^{4} -4\pi = (-4\pi)^{10};$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{23} \sqrt{2}\cdot k^2 = \sqrt{2}^{23}\prod_{k=1}^{23} k^2;$
4. $\displaystyle\prod_{j=3}^{9} j\cdot 2^j = \prod_{j=3}^{9} j \cdot \prod_{j=3}^{9} 2^j;$
5. $\displaystyle\prod_{j=-5}^{3} 2\cdot j^3\cdot 5\cdot 3^j = 2^9\cdot \prod_{j=-5}^{3} j^3 \cdot 5^9 \prod_{j=-5}^{3} 3^j = 10^9\cdot \prod_{j=-5}^{3} j^3 \cdot \prod_{j=-5}^{3} 3^j.$

TAREA Cálcular todas las productorias.

DEFINICIÓN INFORMAL (FACTORIAL)

Dado n entero positivo, definimos el *factorial de* n por

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Además, $0! := 1$ por definición.

PROPIEDADES (FACTORIAL)

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots (k-1) \cdot k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = k! \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$
- $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = (n-1)! \cdot n.$

EJEMPLO (FACTORIAL)

- $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$
- $12! = 479001600$ ¡¡¡Muy grande!!!
- $\dfrac{8!}{5!} = \dfrac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336.$

DEFINICIÓN (Número Combinatorio)

Dados n, k enteros no negativos, con $n \geqslant k$, definimos el número combinatorio como:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Leemos $\binom{n}{k}$ como n tomados de a k

OBSERVACIONES (Número Combinatorio)

- El número combinatorio siempre es un número entero (mostraremos esto en Matemática Discreta).
- El número combinatorio, como su nombre lo indica, tiene importancia en la rama de las matemáticas conocida como *combinatoria* la cual trata el estudio de contar (más allá de que esto parezca simple).
- Además tiene aplicaciones en teoría de probabilidades y estadísticas.

PROPIEDADES (NÚMERO COMBINATORIO)

1. $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$.
2. $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$.
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
4. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

TEOREMA (BINOMIO DE NEWTON)

Para todos los números reales a y b, y n entero no negativo, tenemos la siguiente identidad

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

EJEMPLOS (BINOMIO DE NEWTON $n = 1$)

$$
\begin{aligned}
(a+b)^1 &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} \cdot b^k \\
&= \binom{1}{0} a^1 \cdot b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 \\
&= a \cdot 1 + 1 \cdot b \\
&= a + b
\end{aligned}
$$

EJEMPLOS (BINOMIO DE NEWTON $n = 2$)

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} \cdot b^k \\
&= \binom{2}{0} a^2 \cdot b^0 + \binom{2}{1} a^1 \cdot b^1 + \binom{2}{2} a^0 \cdot b^2 \\
&= a^2 \cdot 1 + 2a^1 \cdot b^1 + 1 \cdot b^2 \\
&= a^2 + 2a \cdot b + b^2
\end{aligned}
$$

EJEMPLOS (BINOMIO DE NEWTON $n = 3$)

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} \cdot b^k \\
&= \binom{3}{0} a^3 \cdot b^0 + \binom{3}{1} a^2 \cdot b^1 + \binom{3}{2} a^1 \cdot b^2 + \binom{3}{3} a^0 \cdot b^3 \\
&= a^3 \cdot 1 + 3a^2 \cdot b^1 + 3a^1 \cdot b^2 + 1 \cdot b^3 \\
&= a^3 + 3a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2 + b^3
\end{aligned}
$$

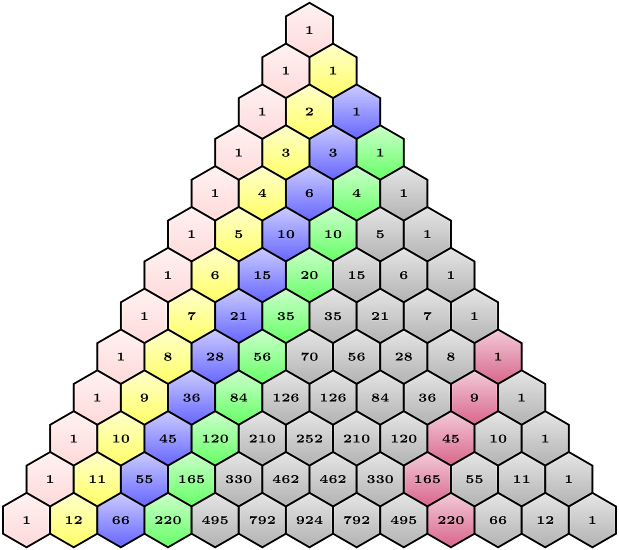


Figura: El triángulo de Pascal contiene los coeficientes que aparecen en el Teorema del Binomio de Newton

EJERCICIO 5a) DEL TP1

1) Determinar el quinto término del desarrollo de

$$\left(2a - \frac{b}{3}\right)^8 .$$

Conceptos

1. Rudimentos de Lógica Matemática
2. Combinatoria y el Principio de Inducción Matemática: una introducción
   a. Número Combinatorio y El Teorema del Binomio
   b. El Principio de Inducción
3. Números complejos

Conceptos

Conceptos

Conceptos

Conceptos