# Análisis Matemático I
# Clase 3: concepto intuitivo de límite

Pablo D. Ochoa

**Facultad de Ingeniería**
**Universidad Nacional de Cuyo.**

Marzo, 2024

**Objetivo de la clase 3:** continuar con los objetivos anteriores y además *se espera que el estudiante comience a familiarizarse con la idea intuitiva de límite y que aplique técnicas analílicas (factorización, racionalización, teorema de la compresión, etc.) para el cálculo de los mismos.*

**¿Qué es el Cálculo?**

*Primera respuesta: El Cálculo es una herramienta matemática que nos permite comprender cómo varían o cambian las funciones*

# Tasa de cambio promedio o rapidez promedio

**Problema 1:** se deja caer un objeto desde lo alto de un edificio. Determinar:

(1) La rapidez promedio durante los primeros 2 s

(2) La rapidez promedio durante el intervalo de tiempo de un segundo a dos segundos.

# Tasa de cambio promedio o rapidez promedio

**Problema 1:** se deja caer un objeto desde lo alto de un edificio. Determinar:

(1) La rapidez promedio durante los primeros 2 s

(2) La rapidez promedio durante el intervalo de tiempo de un segundo a dos segundos.

**Solución:**

(1) Caida libre: la distancia recorrida por el objeto viene dada por:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2, \text{ donde } g \approx 32ft/s^2.$$

Entonces la rapidez promedio durante los primeros 2 segundos es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(2) - y(0)}{2 - 0} = 32ft/s.$$

# Tasa de cambio promedio

(2) Rapidez promedio en el intervalo $[1, 2]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(2) - y(1)}{2 - 1} = 48 ft/s.$$

(2) Rapidez promedio en el intervalo $[1, 2]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(2) - y(1)}{2 - 1} = 48 ft/s.$$

**Problema 2: ¿Qué pasa si queremos calcular la rapidez promedio en un intervalo $[1, 1 + h]$?**
**Solución:** longitud del intervalo: $h$. Entonces la rapidez promedio en el intervalo $[1, 1 + h]$ es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(1 + h) - y(1)}{h} = \frac{16(1 + h)^2 - 16(1)^2}{h}.$$

# Tasa de cambio

## Tasa de cambio promedio

La tasa de cambio promedio de una función $y = f(x)$ con respecto a la variable $x$ en el intervalo $[x_1, x_1 + h]$ es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

.

Interpretar geométricamente.

# Introducción a la tasa de cambio instantánea

Recordar que la tasa de cambio promedio de $y = 16t^2$ en $[t_0, t_0 + h]$ es:

$$\frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h}.$$

Observemos la siguiente situación:

| valor de h | tasa promedio de $y = 16t^2$ para $t_0 = 1$ en $[1, 1 + h]$ |
|---|---|
| 1 | 48 |
| 0.1 | 33.6 |
| 0.01 | 32.16 |
| 0.001 | 32.016 |
| 0.0001 | 32.0016 |

# Introducción a la tasa de cambio instantánea

Recordar que la tasa de cambio promedio de $y = 16t^2$ en $[t_0, t_0 + h]$ es:

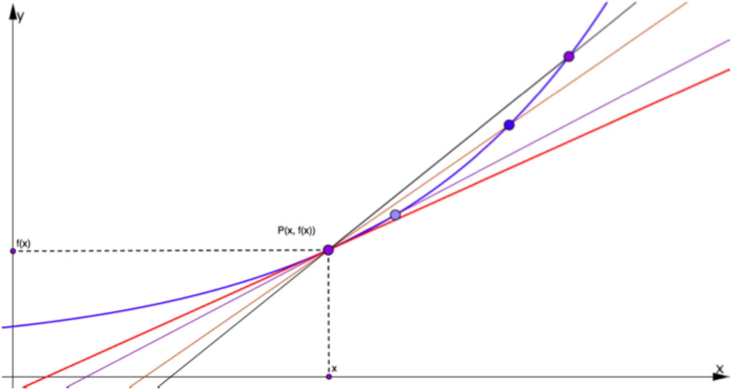
$$\frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h}.$$

Observemos la siguiente situación:

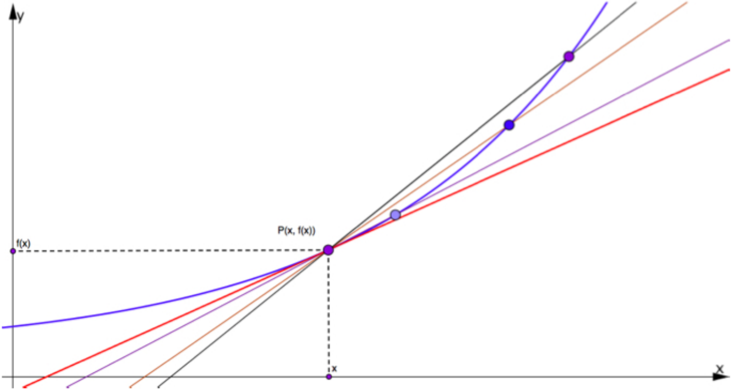
| valor de h | tasa promedio de $y = 16t^2$ para $t_0 = 1$ en $[1, 1 + h]$ |
|---|---|
| 1 | 48 |
| 0.1 | 33.6 |
| 0.01 | 32.16 |
| 0.001 | 32.016 |
| 0.0001 | 32.0016 |

Así, podemos decir que para $t_0 = 1$, la tasa de cambio promedio de $y$ con respecto a $t$ tiende al valor 32 a medida que la longitud del intervalo $[1, 1 + h]$ tiende a cero (es decir, a medida que $h$ tiende a 0.) **Decimos que 32 (ft/s) es la tasa de cambio instantánea de $y$ con respecto a $t$ en $t_0 = 1$. Luego aprenderemos a calcular la rapidez instantánea en forma precisa.**

# Interpretación geométrica de la tasa instantánea



# Interpretación geométrica de la tasa instantánea




## Conclusión

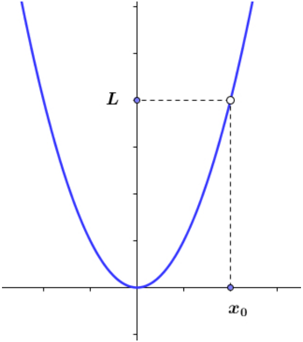
Tasa instantánea de $f$ en $t_0$ = pendiente de la recta tangente al gráfico de $f$ en $(t_0, f(t_0))$.

## ¿Cómo determinar el comportamiento de una función alrededor de un punto?

# ¿Cómo determinar el comportamiento de una función alrededor de un punto?

La búsqueda de respuestas a esta pregunta nos lleva al concepto de *LÍMITE* de una función

Observar que en algunas situaciones, podemos responder los interrogantes sobre el comportamiento de una función a través de su gráfica. Por ejemplo:




Entonces, si nos preguntamos cuál es la tendencia de $f$ cuando $x$ se acerca cada vez más a $x_0$, diríamos que los valores de $f$ tienden a $L$. En símbolos, vamos a escribir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

y leemos: el límite (es decir, la tendencia) de $f$ cuando $x$ tiende a $x_0$ es $L$.

# Concepto intuitivo de límite

Por otro lado, cuando disponemos de la fórmula de la función es posible intentar obtener el comportamiento de la función cerca de $x_0$ dándole valores a la variable independiente $x$ cada vez más cercanos a $x_0$ y evaluándolos en la función. Por ejemplo, consideremos la función:

$$f : (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Supongamos que queremos saber cuál es la tendencia de $f$ cuando $x$ tiende a $x_0 = 1$. Observar que no podemos evaluar $f$ directamente en 1 pues este número no pertenece al dominio de $f$. Lo que haremos es construir una tabla de valores apropiada.

# Concepto intuitivo de límite

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0,9 | 1.9 |
| 0,99 | 1.99 |
| 0,999 | 1.999 |
| 1,1 | 2.1 |
| 1,01 | 2.01 |
| 1,001 | 2.001 |
| 1,0001 | 2.0001 |

Tabla: Valores de $f$ cuando $x$ tiende a 1.

Observar que los valores que se eligen deben estar cada vez más cerca de $x_0 = 1$, tanto por derecha como por izquierda. Además, excluímos el punto $x_0 = 1$ de la tabla.

# Concepto intuitivo de límite

En conclusión, diríamos que la tendencia de $f$ cuando $x$ se acerca cada vez más a $x_0 = 1$ es 2. En símbolos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2.$$

Sin embargo, tanto el enfoque gráfico como el numérico (tabla) presentan limitaciones para calcular límites. En el primer caso, cuando la función a analizar presenta un gráfico complejo o que no se puede determinar con claridad, resulta difícil encontrar el límite con este método. En el caso de la tabla de valores, darle solamente algunos valores a la variable independiente, cercanos al punto de análisis, no garantiza que el límite sea la tendencia observada en la tabla. Por ende, es necesario recurrir a herramientas analíticas que nos permitan obtener respuestas exactas. Con la finalidad de encontrar resultados exactos sin necesidad de gráficas ni tablas, vamos a introducir la definición de **límite** y estrategias para su cálculo.

# Concepto intuitivo de límite

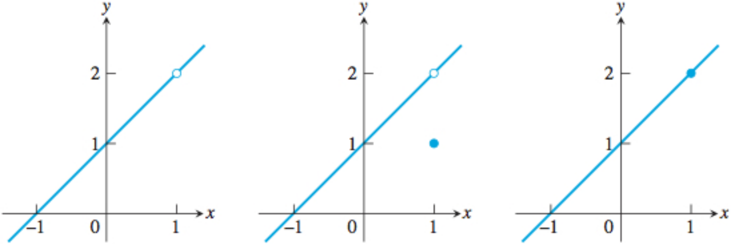
Comenzaremos con la definición informal de límite:

## Definición informal de límite

Supongamos que $f$ está definida en un intervalo abierto alrededor de $x_0$, excepto posiblemente en el punto $x_0$. Si los valores $f(x)$ de la función $f$ están arbitrariamente cercanos a un número $L$, para toda $x$ suficientemente cercana al punto $x_0$, decimos que $f$ tiende a $L$ cuando $x$ tiende a $x_0$, y escribimos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

**Estudiar el límite de las siguientes funciones cuando $x$ tiende a 1.**

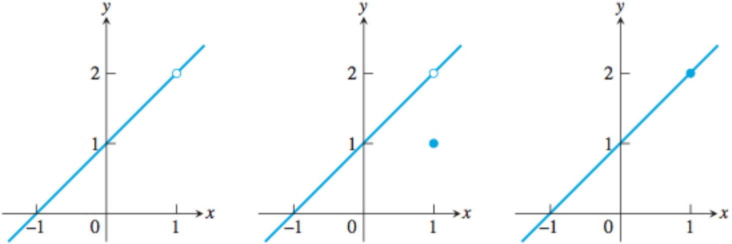



(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(c) $h(x) = x + 1$

**Estudiar el límite de las siguientes funciones cuando $x$ tiende a $1$.**




(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

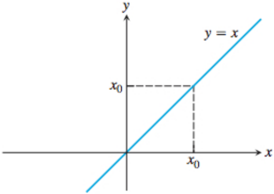
(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(c) $h(x) = x + 1$

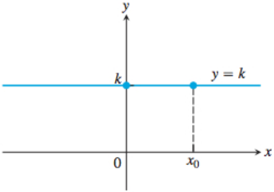
¡En todos los ejemplos, el límite considerado es 2!

**Observación importante:** el límite de una función cuando la variable independiente tiende a un valor $x_0$ puede existir sin que la función esté definida en el punto $x_0$. Es decir, para calcular límites, no es relavante si la función está definida o no en el punto de interés!!!.

# Funciones identidad y constante

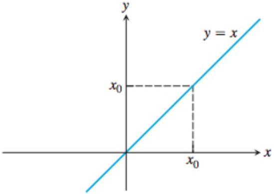



(a) Función identidad

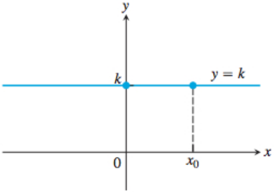



(b) Función constante

# Funciones identidad y constante



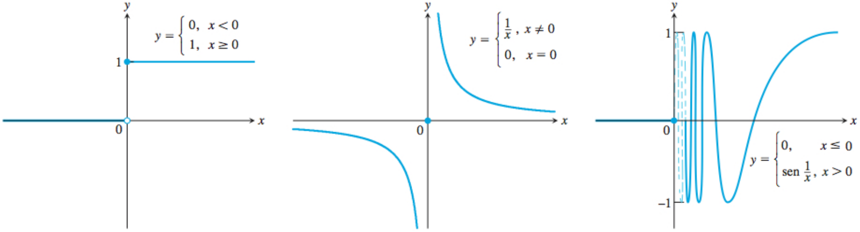

(a) Función identidad




(b) Función constante

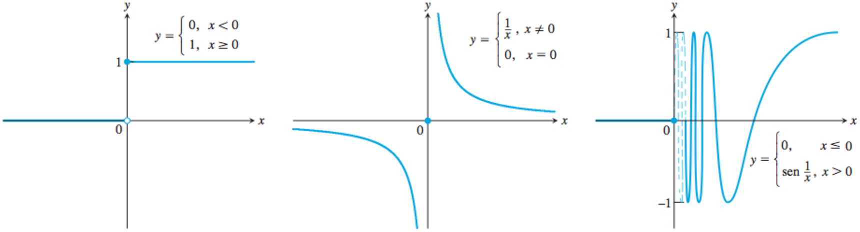
En el primer caso $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ y en el segundo $\lim_{x\to x_0} k = k$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

**Más ejemplos: analizar si existe o no el límite de las siguientes funciones cuando $x$ tiende a $0$.**




(a) Función escalón unitario $U(x)$ (b) $g(x)$ (c) $f(x)$

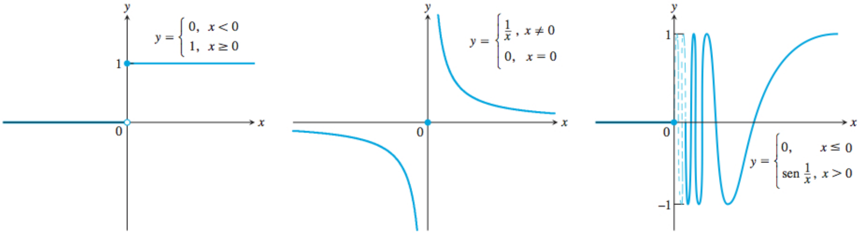
**Más ejemplos: analizar si existe o no el límite de las siguientes funciones cuando $x$ tiende a $0$.**




(a) Función escalón unitario $U(x)$ (b) $g(x)$ (c) $f(x)$

(a) El límite $\lim_{x \to 0} U(x)$ no existe pues cuando $x$ se acerca a 0 por la izquierda (valores negativos), la función $U(x)$ vale siempre 0, mientras que cuando $x$ se acerca a 0 por la derecha (valores positivos), la función $U(x)$ vale siempre 1. Como los valores de la función $U$ no se acercan a un número para todo $x$ suficientemente cercano a 0, el límite estuadiado no existe.

# Concepto intuitivo de límite




(a) Función escalón unitario $U(x)$ (b) $g(x)$ (c) $f(x)$

(b) El límite $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe pues cuando $x$ tiende a 0 por la derecha los valores de la función $y = g(x)$ se hacen arbitrariamente grandes. Así, los valores de $g$ no se acercan a un determinado valor cuando $x$ tiende a 0.

(c) Las oscilaciones de la función $f$ cuando $x$ tiende a 0 por la derecha hacen que los valores de la función no se acerquen a un determinado valor. Luego, $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

# Propiedades de los límite y cálculo de límites

## Teorema

Supongamos que los límites:

$$\lim_{x\to c} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to c} g(x), \text{ existen.}$$

Entonces:

- $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$.
- $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$.
- Si $k \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\lim_{x\to c} f(x)$.
- $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x)\cdot \lim_{x\to c} g(x)$.
- Si $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$.
- $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$, $n$ es un entero positivo.
- $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, $n$ es un entero positivo. Cuando $n$ es par, se pide que el límite de f sea no negativo.

**Consecuencias: cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales**

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, entonces:

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$$

Además, si $P$ y $Q$ son polinomios y $Q(c) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Así, por ejemplo

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x^2 - x + 1} = \frac{3}{1} = 3.$$

**Consecuencias: cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales**

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, entonces:

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$$

Además, si $P$ y $Q$ son polinomios y $Q(c) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Así, por ejemplo

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x^2 - x + 1} = \frac{3}{1} = 3.$$

Pregunta: ¿qué sucede si $Q(c) = 0$?

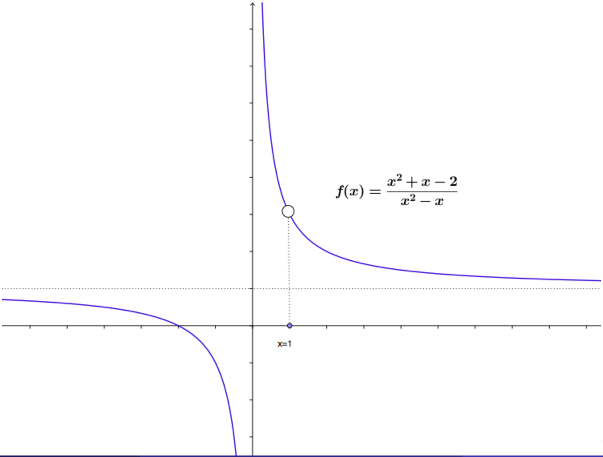
**Ejemplo: calcular**

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}.$$

**Ejemplo: calcular**

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}.$$

Observar que la función no está definida ni en 0 ni en 1:



# Cálculo de límites

Observar que el denominador:

$$x^2 - x$$

se anula en $x = 1$ (el punto de análisis del límite). Por ende, para calcular el límite no se puede reemplazar directamente por $x = 1$ en el cociente. Sin embargo, se puede eliminar el problema mediante factorización:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x}.$$

Observar que en el último caso, el denominador no se anula en $x = 1$. Por ende podemos reemplazar en el último cociente $x$ por $1$ y obtener:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{1+2}{1} = 3.$$

**Ejercicio: calcular**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}.$$