Capítulo 14 – Movimiento armónico simple

Presentación PowerPoint de

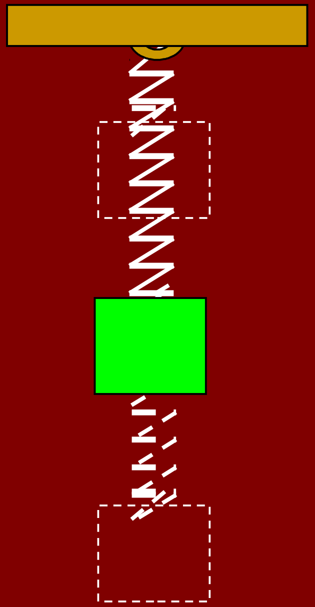
Paul E. Tippens, Profesor de Física

Southern Polytechnic State University

UN TRAMPOLÍN ejerce una fuerza restauradora sobre el saltador que es directamente proporcional a la fuerza promedio requerida para desplazar la colchoneta. Tales fuerzas restauradoras proporcionan las fuerzas necesarias para que los objetos oscilen con movimiento armónico simple.

Objetivos: Después de terminar esta unidad, deberá:

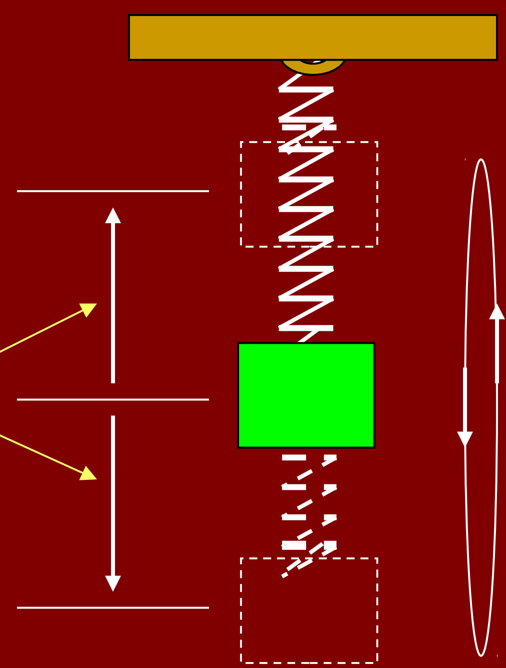
- Escribir y aplicar la ley de Hooke para objetos que se mueven con movimiento armónico simple.
- Escribir y aplicar fórmulas para encontrar frecuencia *f*, periodo *T*, velocidad *v* o aceleración *a* en términos de desplazamiento *x* o tiempo *t*.
- Describir el movimiento de péndulos y calcular la longitud requerida para producir una frecuencia dada.



Movimiento periódico

El movimiento periódico simple es aquel movimiento en el que un cuerpo se mueve de ida y vuelta sobre una trayectoria fija y regresa a cada posición y velocidad después de un intervalo de tiempo definido.

$$f = \frac{1}{T}$$

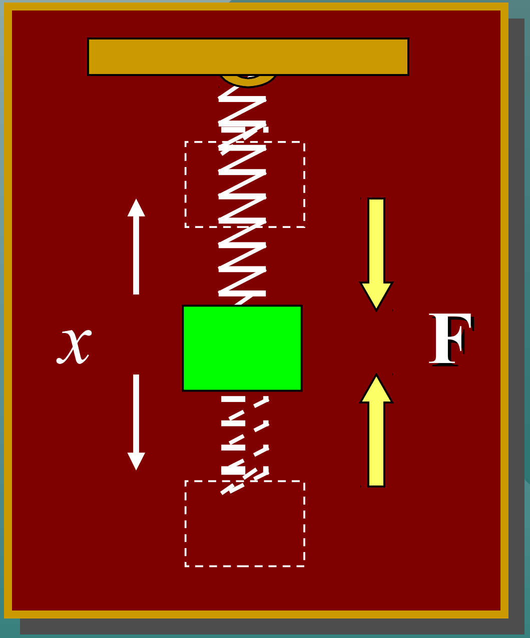


Amplitud A

El periodo, T, es el tiempo para una oscilación completa. (segundos,s)

La frecuencia, f, es el número de oscilaciones completas por segundo. Hertz (s^{-1})

Ejemplo 1: La masa suspendida realiza 30 oscilaciones completas en 15 s. ¿Cuáles son el periodo y la frecuencia del movimiento?



$$T = \frac{15\text{ s}}{30\text{ ciclos}} = 0.50\text{ s}$$

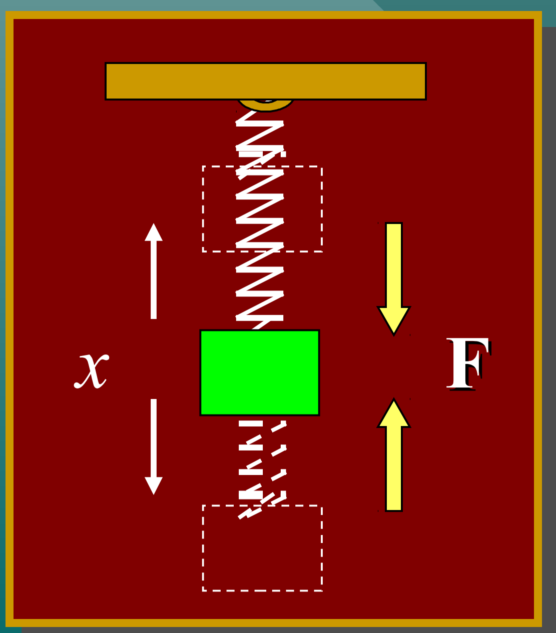
Periodo: T = 0.500 s

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.500\text{ s}}$$

Frecuencia: f = 2.00 Hz

Movimiento armónico simple, MAS

El movimiento armónico simple es movimiento periódico en ausencia de fricción y producido por una fuerza restauradora que es directamente proporcional al desplazamiento y de dirección opuesta.

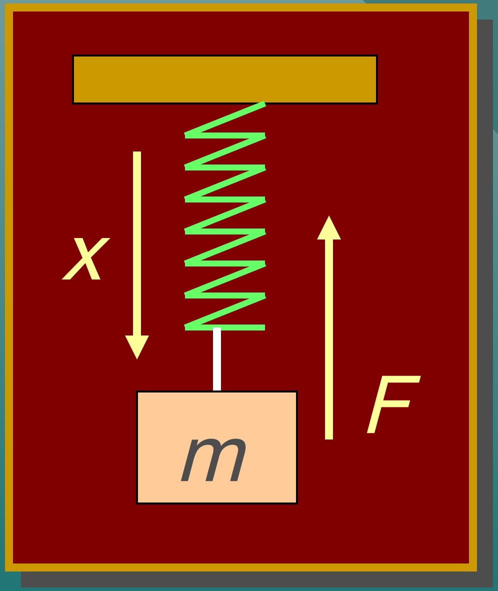


Una <u>fuerza restauradora</u>, F, actúa en la dirección opuesta al desplazamiento del cuerpo en oscilación.

$$F = -kx$$

Ley de Hooke

Cuando un resorte se estira, hay una fuerza restauradora que es proporcional al desplazamiento.



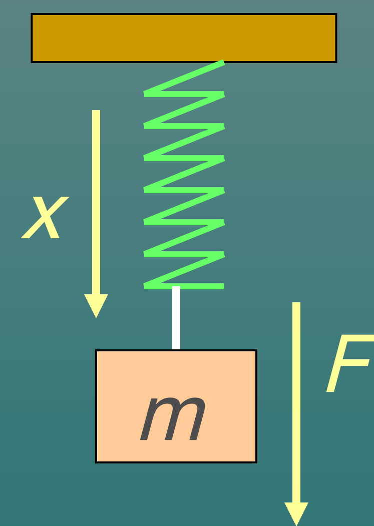
$$F = -kx$$

La constante de resorte k es una propiedad del resorte dada por:

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

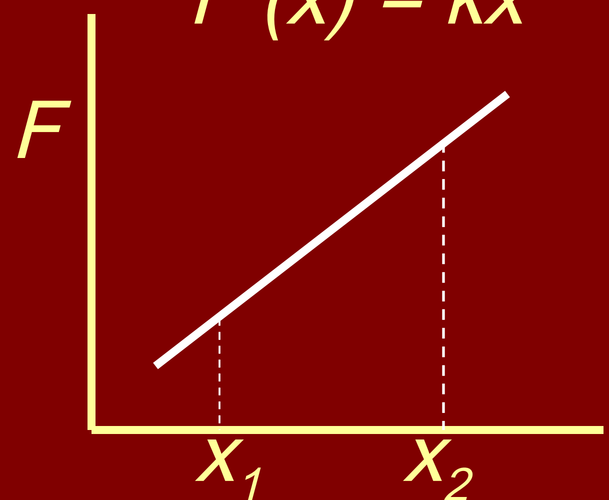
Trabajo realizado para estirar un resorte

*El trabajo realizado **SOBRE** el resorte es **positivo**; el trabajo **DEL** resorte es **negativo**.*



De la ley de Hooke la fuerza F es:

$$F(x) = kx$$

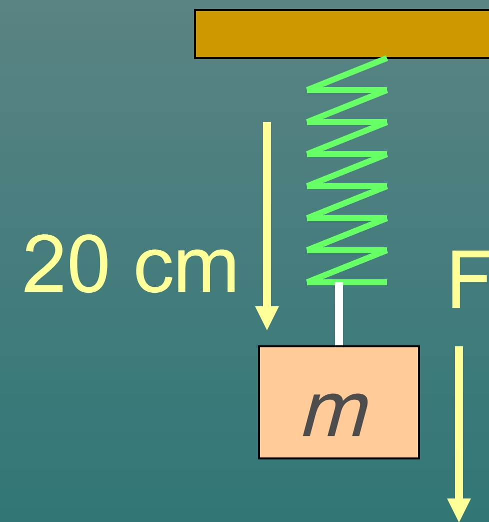


Para estirar el resorte de x_1 a x_2, el trabajo es:

$$Trabajo = \tfrac{1}{2}kx_2^2 - \tfrac{1}{2}kx_1^2$$

(Review module on work)

Ejemplo 2: Una masa de 4 kg, suspendida de un resorte, produce un desplazamiento de 20 cm. ¿Cuál es la constante de resorte?



La fuerza que estira es el peso ($W = mg$) de la masa de 4 kg:

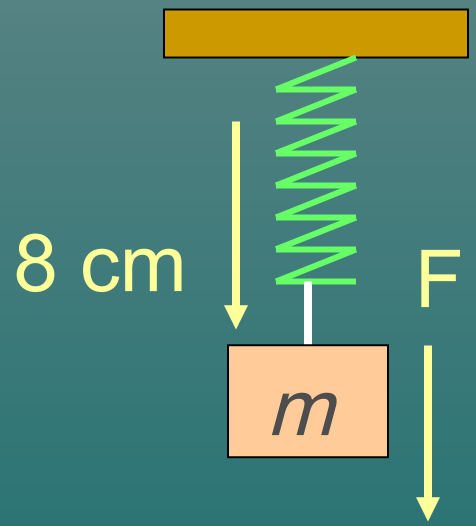
$$F = (4\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) = 39.2\text{ N}$$

Ahora, de la ley de Hooke, la constante de fuerza k del resorte es:

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{39.2\text{ N}}{0.2\text{ m}}$$

$$\boxed{k = 196\text{ N/m}}$$

Ejemplo 2 (cont.): La masa *m* ahora se estira una distancia de 8 cm y se sostiene. ¿Cuál es la energía potencial? (k = 196 N/m)



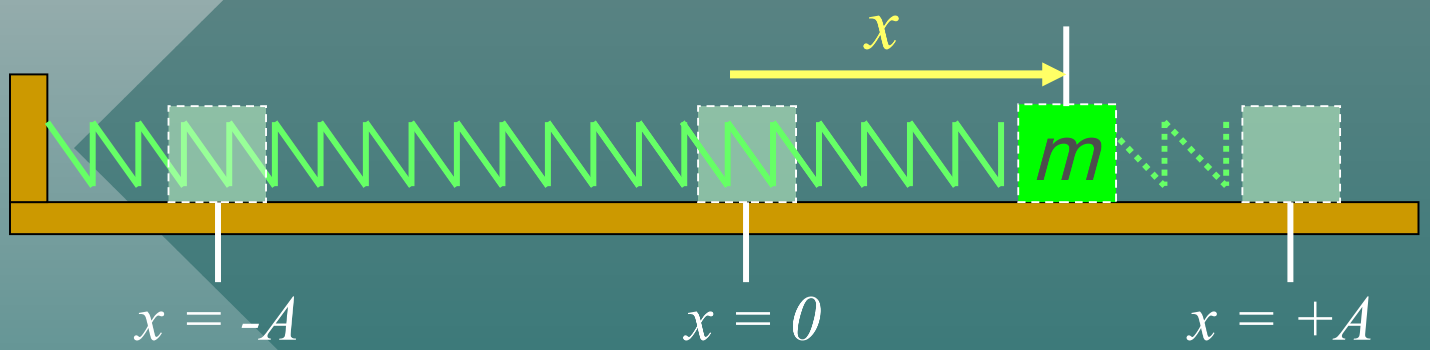
La energía potencial es igual al trabajo realizado para estirar el resorte:

$$Trabajo = \tfrac{1}{2}kx_2^2 - \cancelto{0}{\tfrac{1}{2}kx_1^2}$$

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(196\ \text{N/m})(0.08\ \text{m})^2$$

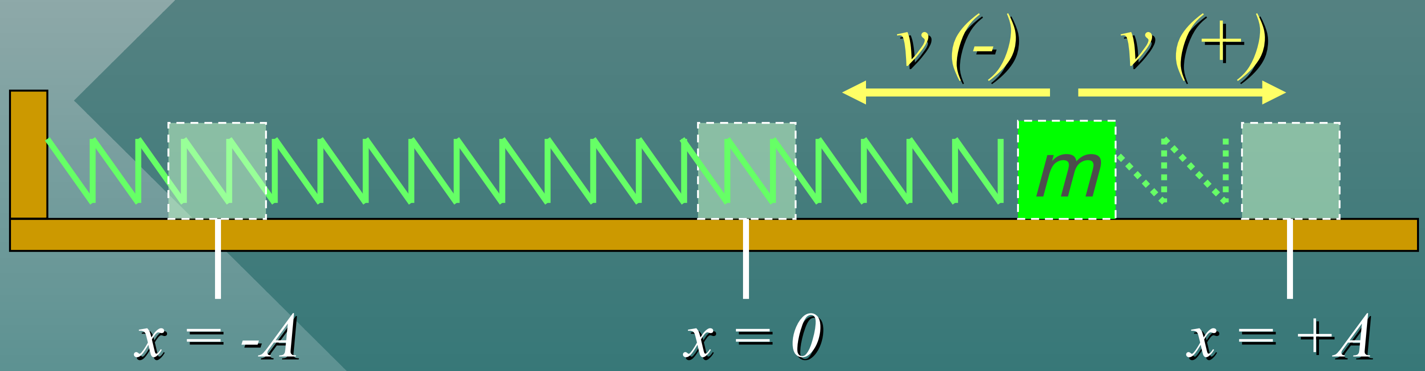
$$\boxed{U = 0.627\ \text{J}}$$

Desplazamiento en MAS



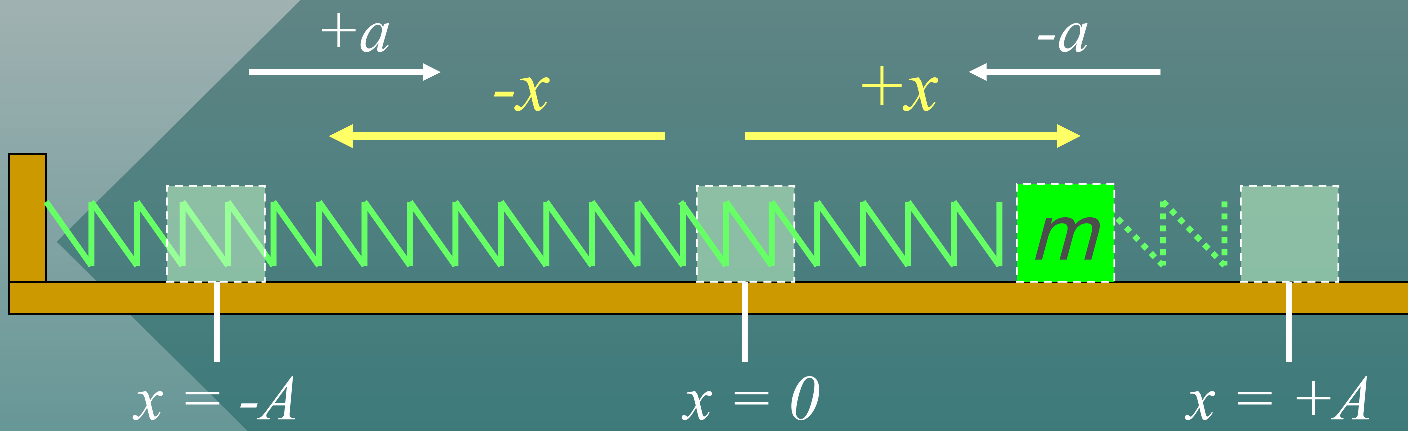
- El desplazamiento es positivo cuando la posición está a la derecha de la posición de equilibrio (x = 0) y negativo cuando se ubica a la izquierda.
- Al desplazamiento máximo se le llama la amplitud A.

Velocidad en MAS



- La velocidad es positiva cuando se mueve a la derecha y negativa cuando se mueve a la izquierda.
- Es cero en los puntos finales y un máximo en el punto medio en cualquier dirección (+ o -).

Aceleración en MAS

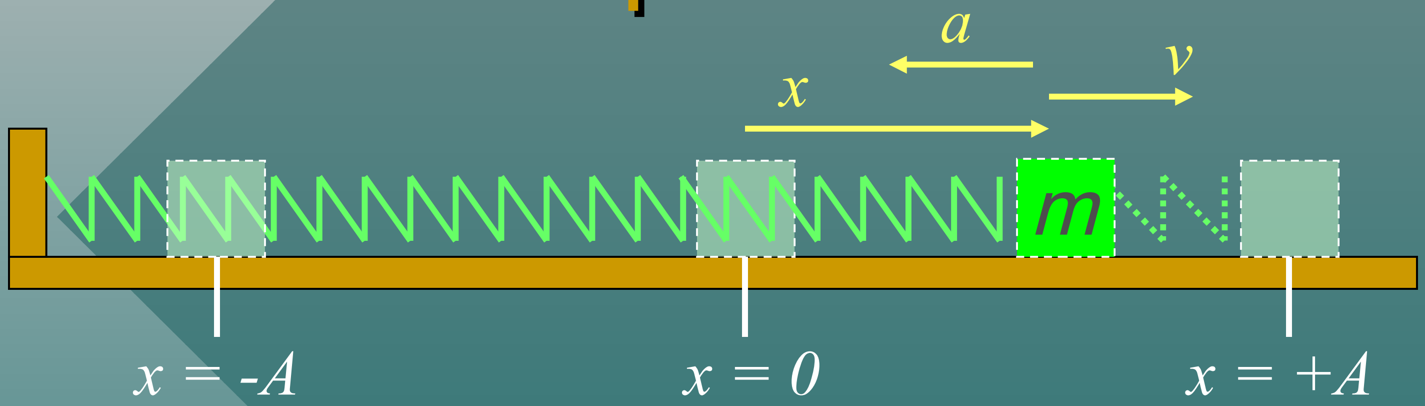


- La aceleración está en la dirección de la fuerza restauradora. (*a* es positiva cuando x es negativa, y negativa cuando x es positiva.)

$$F = ma = -kx$$

- La aceleración es un máximo en los puntos finales y es cero en el centro de oscilación.

Aceleración contra desplazamiento



Dados la constante de resorte, el desplazamiento y la masa, la aceleración se puede encontrar de:

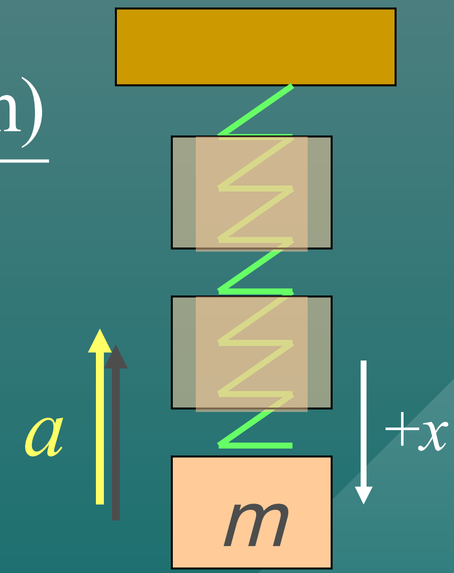
$$F = ma = -kx \quad \text{o} \quad a = \frac{-kx}{m}$$

Nota: La aceleración siempre es opuesta al desplazamiento.

Ejemplo 3: Una masa de 2 kg cuelga en el extremo de un resorte cuya constante es k = 400 N/m. La masa se desplaza una distancia de 12 cm y se libera. ¿Cuál es la aceleración en el instante cuando el desplazamiento es x = +7 cm?

$$a = \frac{-kx}{m} \qquad a = \frac{-(400\ \text{N/m})(+0.07\ \text{m})}{2\ \text{kg}}$$

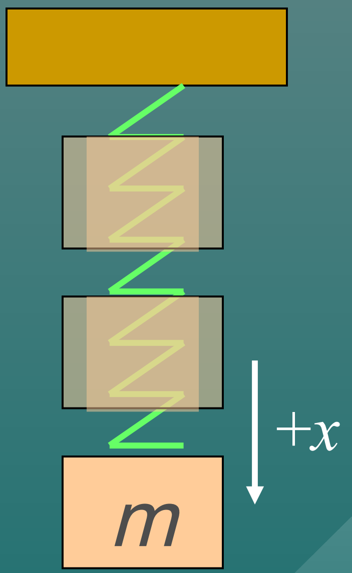
$$\boxed{\boldsymbol{a} = -14.0\ \text{m/s}^2}$$



Nota: Cuando el desplazamiento es +7 cm (hacia abajo), la aceleración es -14.0 m/s² (hacia arriba) independiente de la dirección de movimiento.

Ejemplo 4: ¿Cuál es la aceleración máxima para la masa de 2 kg del problema anterior? (A = 12 cm, k = 400 N/m)

La aceleración máxima ocurre cuando la fuerza restauradora es un máximo; es decir: cuando el alargamiento o compresión del resorte es mayor.



$$F = ma = -kx \qquad x_{max} = \pm A$$

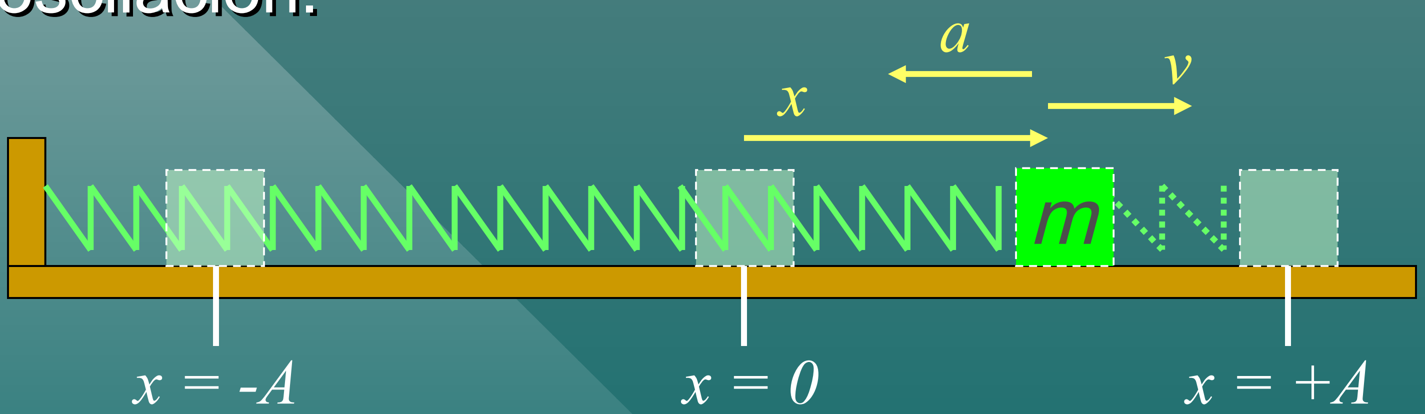
$$a = \frac{-kA}{m} = \frac{-400\text{ N}(\pm 0.12\text{ m})}{2\text{ kg}}$$

Máxima aceleración:

$$\boxed{a_{max} = \pm\, 24.0\text{ m/s}^2}$$

Conservación de energía

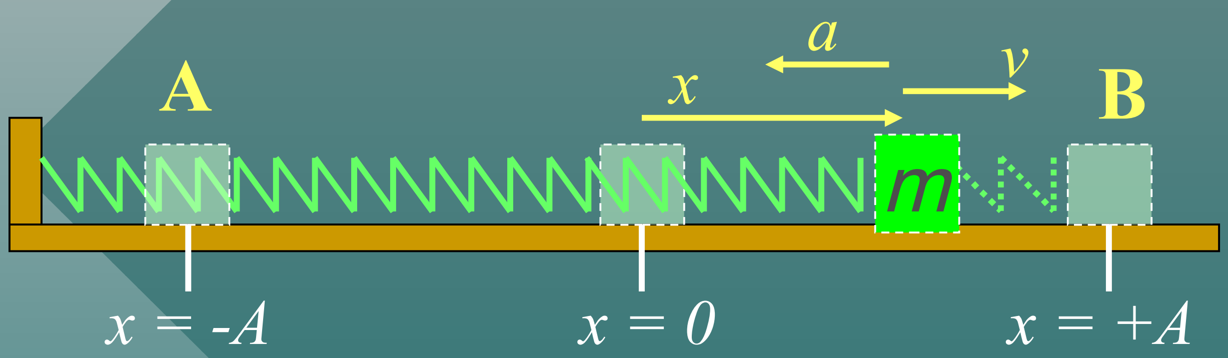
La energía mecánica total (U + K) de un sistema en vibración es constante; es decir: es la misma en cualquier punto en la trayectoria de oscilación.



Para cualesquier dos puntos A y B, se puede escribir:

$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + \tfrac{1}{2}kx_A^2 = \tfrac{1}{2}mv_B^2 + \tfrac{1}{2}kx_B^2$$

Energía de sistema en vibración:

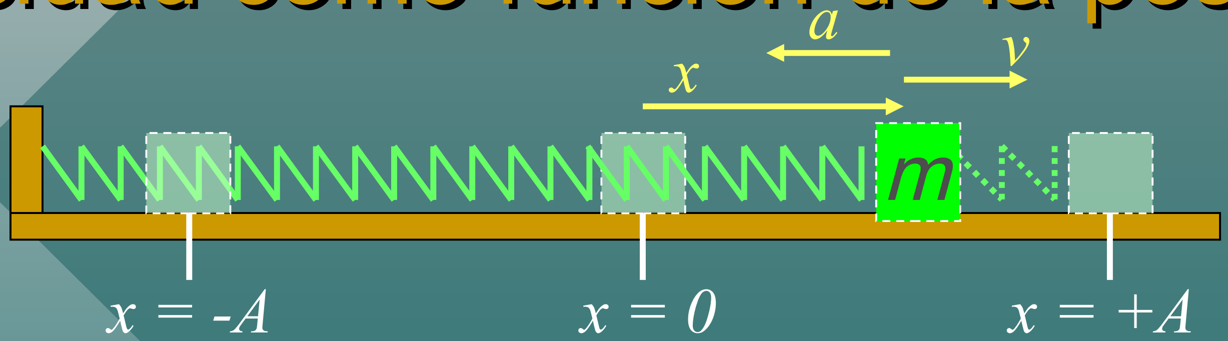


- En los puntos A y B, la velocidad es cero y la aceleración es un máximo. La energía total es:

$$U + K = \tfrac{1}{2}kA^2 \quad x = \pm A \quad y \quad v = 0.$$

- En cualquier otro punto: $U + K = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$

Velocidad como función de la posición.

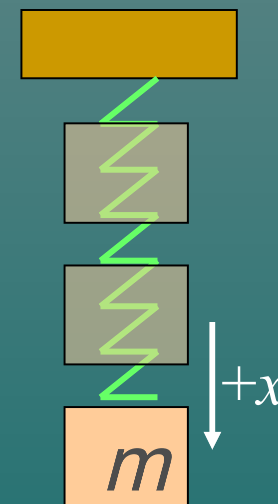


$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 \qquad v = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}$$

v_{max} cuando x = 0:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}A$$

Ejemplo 5: Una masa de 2 kg cuelga en el extremo de un resorte cuya constante es k = 800 N/m. La masa se desplaza una distancia de 10 cm y se libera. ¿Cuál es la velocidad en el instante cuando el desplazamient es x = +6 cm?



$$\cancel{\tfrac{1}{2}}mv^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}kx^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}kA^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{800\ \text{N/m}}{2\ \text{kg}}}\sqrt{(0.1\ \text{m})^2 - (0.06\ \text{m})^2}$$

$$\boxed{v = \pm 1.60\ \text{m/s}}$$

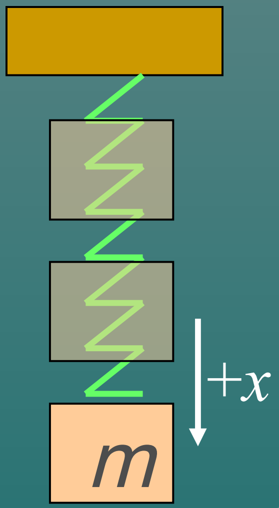
Ejemplo 5 (Cont.): ¿Cuál es la velocidad máxima para el problema anterior? (A = 10 cm, k = 800 N/m, m = 2 kg.)

La velocidad es máxima cuando x = 0:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \cancelto{0}{\tfrac{1}{2}kx^2} = \tfrac{1}{2}kA^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{800\text{ N/m}}{2\text{ kg}}}(0.1\text{ m})$$

$$\boxed{v = \pm\, 2.00\text{ m/s}}$$



El círculo de referencia

El círculo de referencia compara el movimiento circular de un objeto con su proyección horizontal.

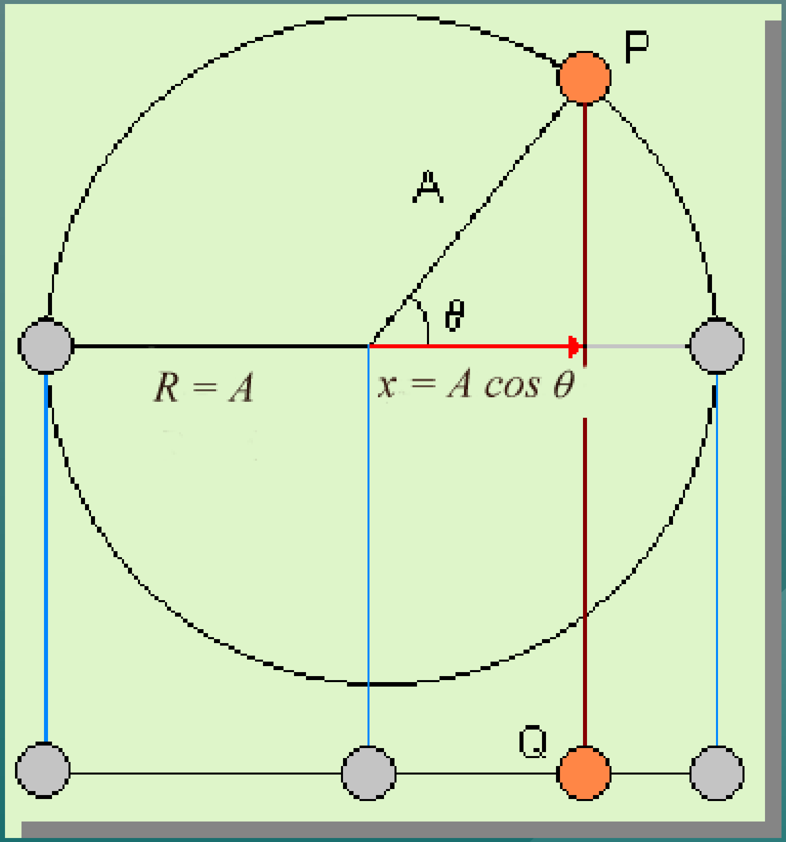
$$x = A\cos\theta \qquad \theta = \omega t$$

$$x = A\cos(2\pi f t)$$

x = Desplazamiento horizontal.

A = Amplitud (x_{max}).

θ = Ángulo de referencia.



$$\omega = 2\pi f$$

Velocidad en MAS

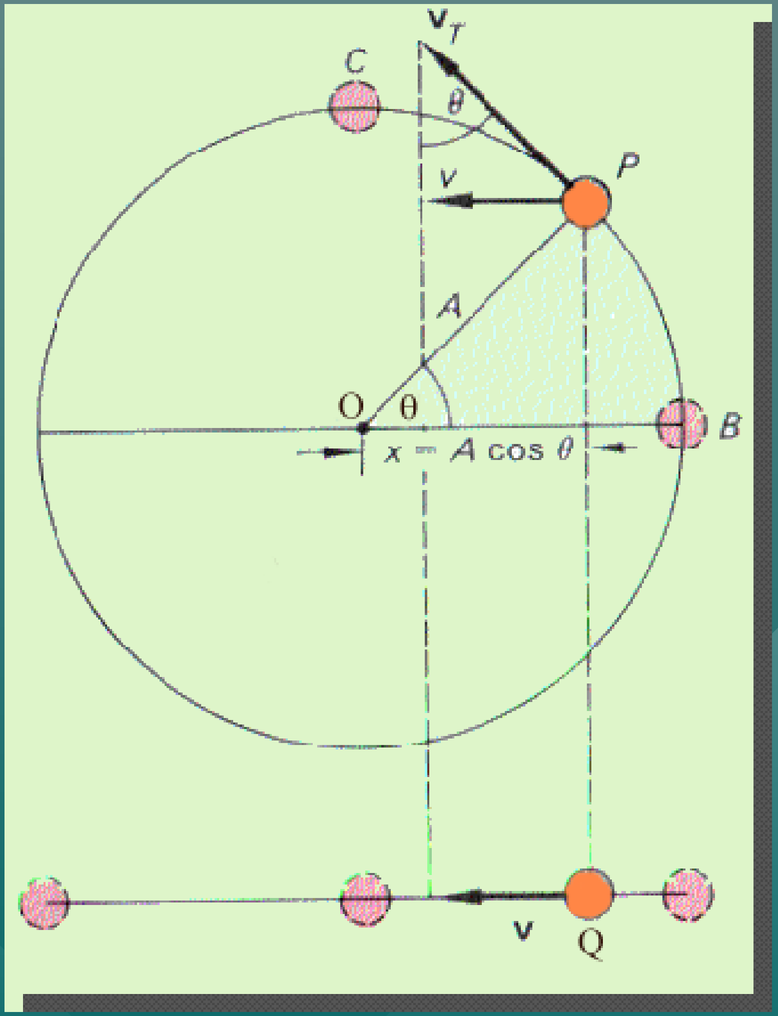
La **velocidad** (v) de un cuerpo en oscilación en cualquier instante es el componente horizontal de su velocidad tangencial (v_T).

$$v_T = \omega R = \omega A; \quad \omega = 2\pi f$$

$$v = -v_T \operatorname{sen} \theta; \quad \theta = \omega t$$

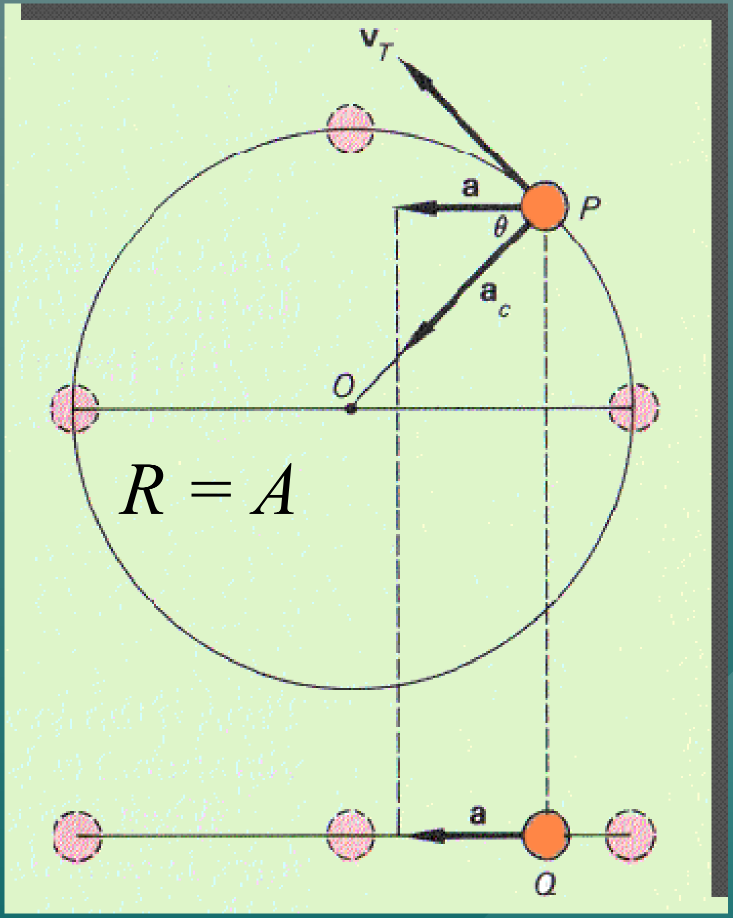
$$v = -\omega A \operatorname{sen} \omega t$$

$$\boxed{v = -2\pi f A \operatorname{sen} 2\pi f t}$$



Aceleración y círculo de referencia

La aceleración (a) de un cuerpo en oscilación en cualquier instante es el componente horizontal de su aceleración centrípeta (a_c).



$$a = -a_c \cos \theta = -a_c \cos(\omega t)$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R}; \quad a_c = \omega^2 R$$

$$a = -\omega^2 A \cos(\omega t)$$

$$a = -4\pi^2 f^2 A \cos(2\pi f t)$$

$$\boxed{a = -4\pi^2 f^2 x}$$

El periodo y la frecuencia como función de a y x.

Para cualquier cuerpo que experimente movimiento armónico simple:

Dado que $a = -4\pi^2 f^2 x$ y $T = 1/f$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{-a}{x}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{-x}{a}}$$

La frecuencia y el periodo se pueden encontrar si se conocen el desplazamiento y la aceleración. Note que los signos de a y x siempre serán opuestos.

Periodo y frecuencia como función de masa y la constante de resorte.

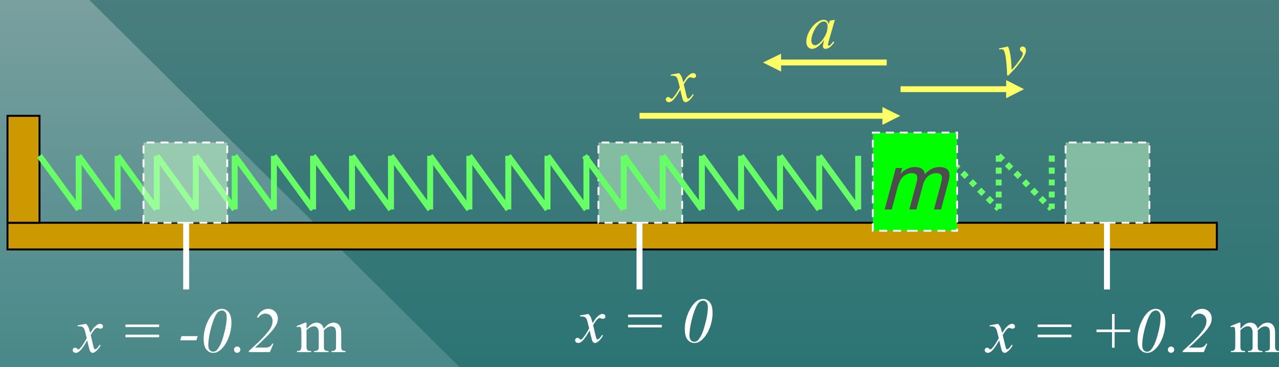
Para un cuerpo en vibración con una fuerza restauradora elástica:

Recuerde que *F = ma = -kx*:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La frecuencia *f* y el periodo *T* se pueden encontrar si se conocen la constante de resorte *k* y la masa *m* del cuerpo en vibración. Use unidades SI consistentets.

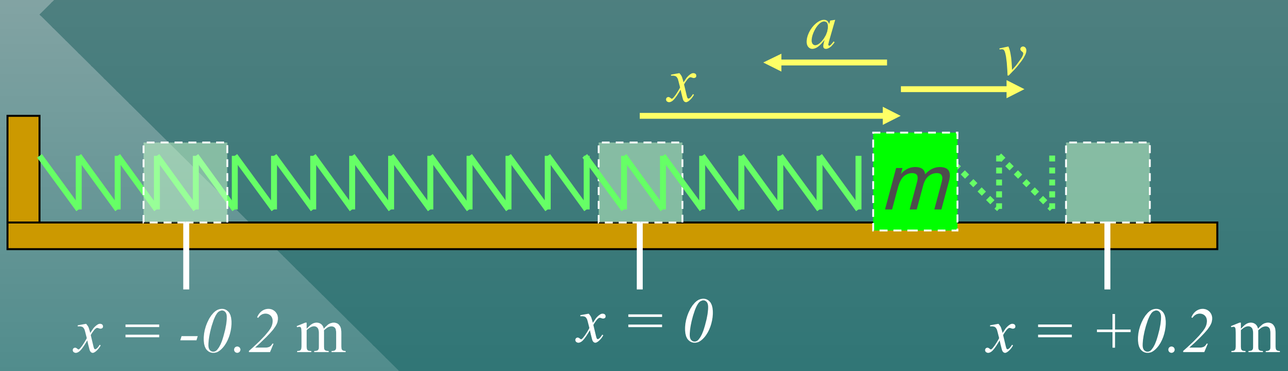
Ejemplo 6: El sistema sin fricción que se muestra abajo tiene una masa de 2 kg unida a un resorte (k = 400 N/m). La masa se desplaza una distancia de 20 cm hacia la derecha y se libera. ¿Cuál es la frecuencia del movimiento?



$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{400\text{ N/m}}{2\text{ kg}}}$$

$$\boxed{f = 2.25\text{ Hz}}$$

Ejemplo 6 (Cont.): Suponga que la masa de 2 kg del problema anterior se desplaza 20 cm y se libera (k = 400 N/m). ¿Cuál es la aceleración máxima? (f = 2.25 Hz)



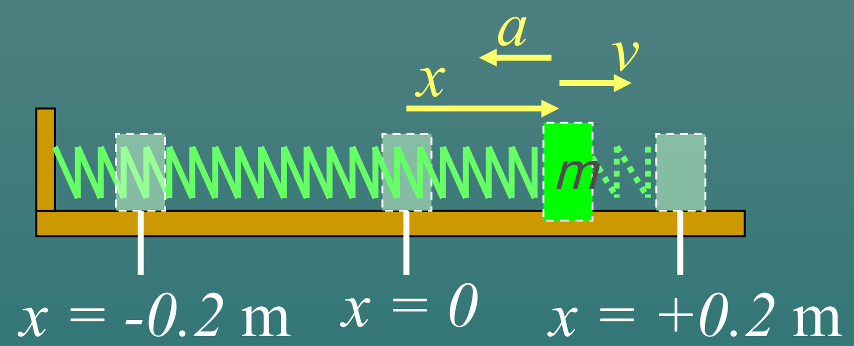
La aceleración es un máximo cuando $x = \pm A$

$$a = -4\pi^2 f^2 x = -4\pi^2 (2.25 \text{ Hz})^2 (\pm 0.2 \text{ m})$$

$$\boxed{a = \pm 40 \text{ m/s}^2}$$

Ejemplo 6: La masa de 2 kg del problema anterior se desplaza inicialmente a x = 20 cm y se libera. ¿Cuál es la velocidad 2.69 s después de liberada? (Recuerde que f = 2.25 Hz.)

$$v = -2\pi f\, A \text{ sen } 2\pi f\, t$$



$$v = -2\pi(2.25\text{ Hz})(0.2\text{ m})sen[2\pi(2.25\text{ Hz})(2.69\text{ s})]$$

(Nota: θ en rads)

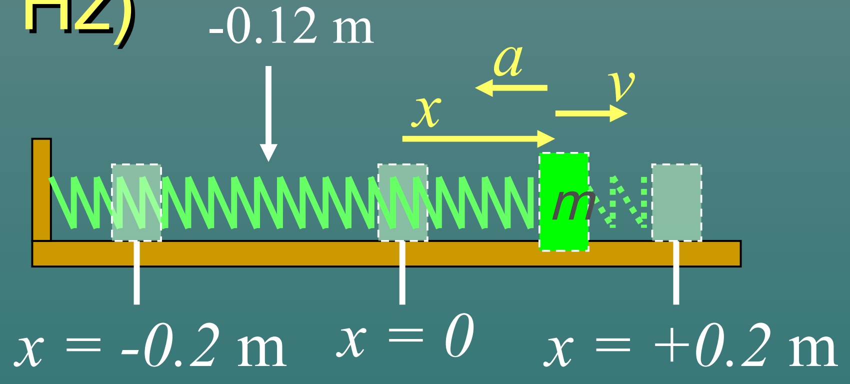
$$v = -2\pi(2.25\text{ Hz})(0.2\text{ m})(0.324)$$

$$v = -0.916\text{ m/s}$$

El signo menos significa que se mueve hacia la izquierda.

Ejemplo 7: ¿En qué tiempo la masa de 2 kg se ubicará 12 cm a la izquierda de x = 0? (A = 20 cm, f = 2.25 Hz)

$$x = A\cos(2\pi ft)$$



$$\cos(2\pi ft) = \frac{x}{A} = \frac{-0.12\text{ m}}{0.20\text{ m}}; \qquad (2\pi ft) = \cos^{-1}(-0.60)$$

$$2\pi ft = 2.214\text{ rad}; \qquad t = \frac{2.214\text{ rad}}{2\pi(2.25\text{ Hz})}$$

$$\boxed{t = 0.157\text{ s}}$$

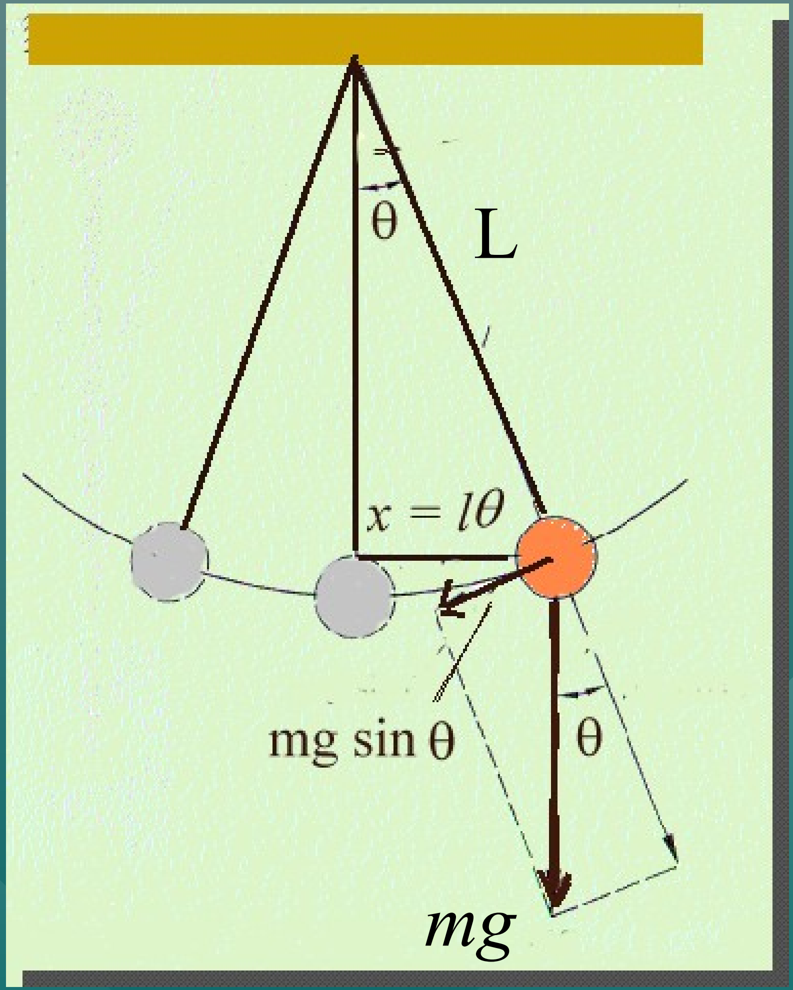
El péndulo simple

El periodo de un péndulo simple está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

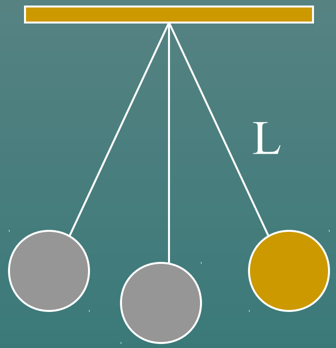
Para ángulos pequeños θ.

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$



Ejemplo 8. ¿Cuál debe ser la longitud de un péndulo simple para un reloj que tiene un periodo de dos segundos (tic-toc)?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



$$T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g}; \qquad \mathrm{L} = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$$

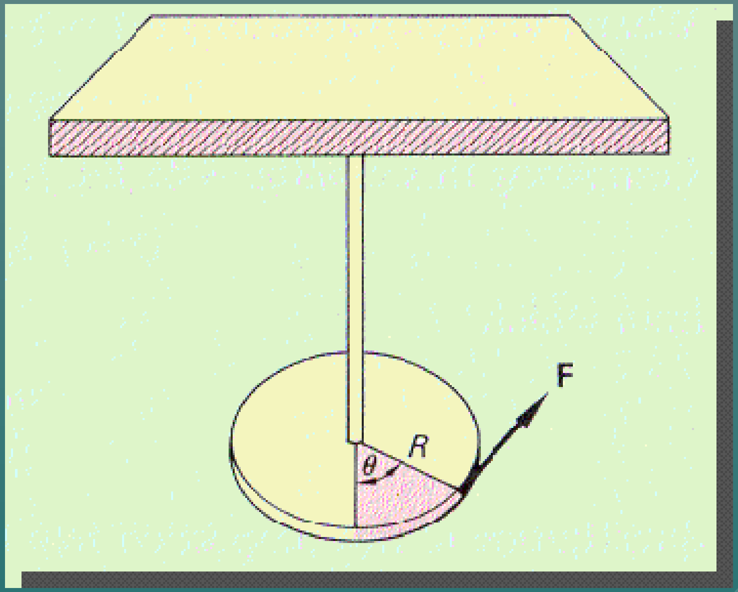
$$L = \frac{(2\ \mathrm{s})^2(9.8\ \mathrm{m/s^2})}{4\pi^2}$$

$$\boxed{\mathrm{L} = 0.993\ \mathrm{m}}$$

El péndulo de torsión

El periodo T de un péndulo de torsión está dado por:

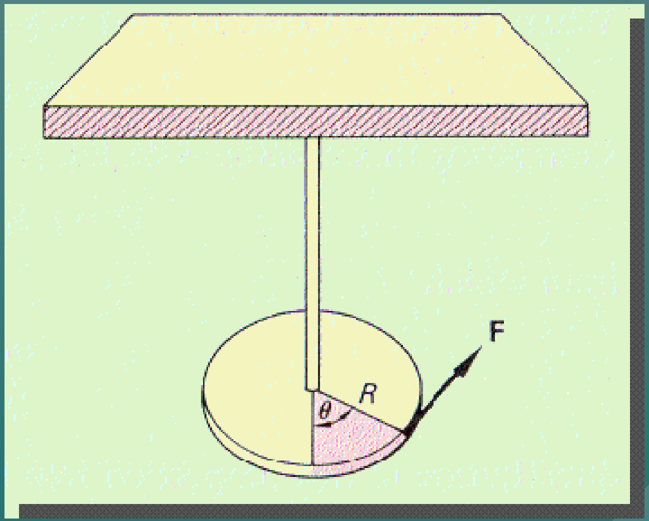
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k'}}$$



Donde *k'* es una constante de torsión que depende del material del que esté hecho la barra; *I* es la inercia rotacional del sistema en vibración.

Ejemplo 9: Un disco sólido de 160 g se une al extremo de un alambre, luego gira 0.8 rad y se libera. La constante de torsión k' es 0.025 N m/rad. Encuentre el periodo.

(Desprecie la torsión en el alambre)



Para disco: $I = \tfrac{1}{2}mR^2$

$$I = \tfrac{1}{2}(0.16\ \text{kg})(0.12\ \text{m})^2$$
$$= 0.00115\ \text{kg m}^2$$

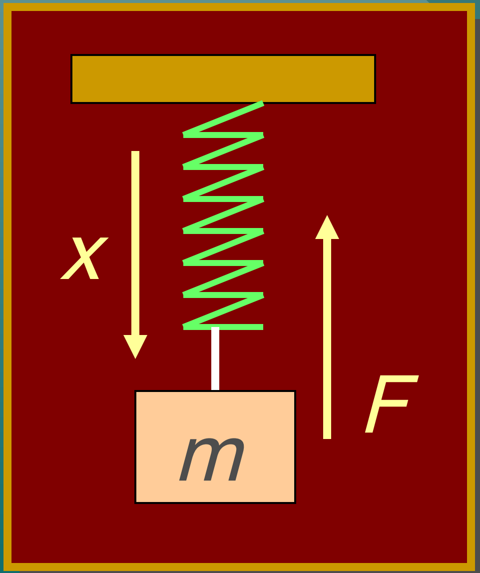
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k'}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.00115\ \text{kg m}^2}{0.025\ \text{N m/rad}}}$$

$$\boxed{T = 1.35\ \text{s}}$$

Nota: El periodo es independiente del desplazamiento angular.

Resumen

El movimiento armónico simple (MAS) es aquel movimiento en el que un cuerpo se mueve de ida y vuelta sobre una trayectoria fija, y regresa a cada posición y velocidad después de un intervalo de tiempo definido.

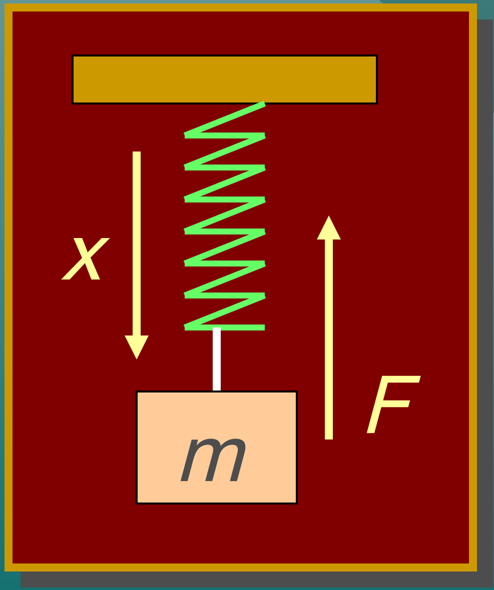


La frecuencia (rev/s) es el recíproco del periodo (tiempo para una revolución).

$$f = \frac{1}{T}$$

Resumen (Cont.)

Ley de Hooke' : En un resorte, hay una fuerza restauradora que es proporcional al desplazamiento.

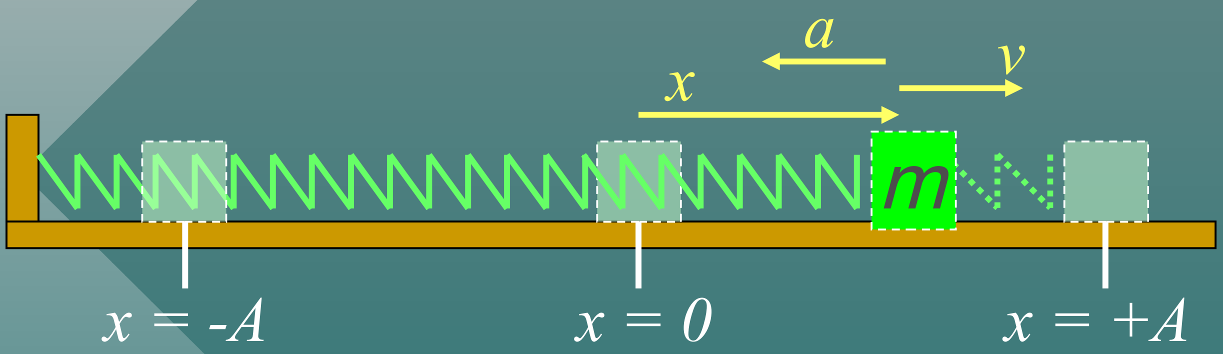


$$F = -kx$$

La constante de resorte k se define como:

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

Resumen (MAS)



$$F = ma = -kx \qquad a = \frac{-kx}{m}$$

Conservación de energía:

$$\boxed{\tfrac{1}{2}mv_A^2 + \tfrac{1}{2}kx_A^{\,2} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 + \tfrac{1}{2}kx_B^{\,2}}$$

Resumen (MAS)

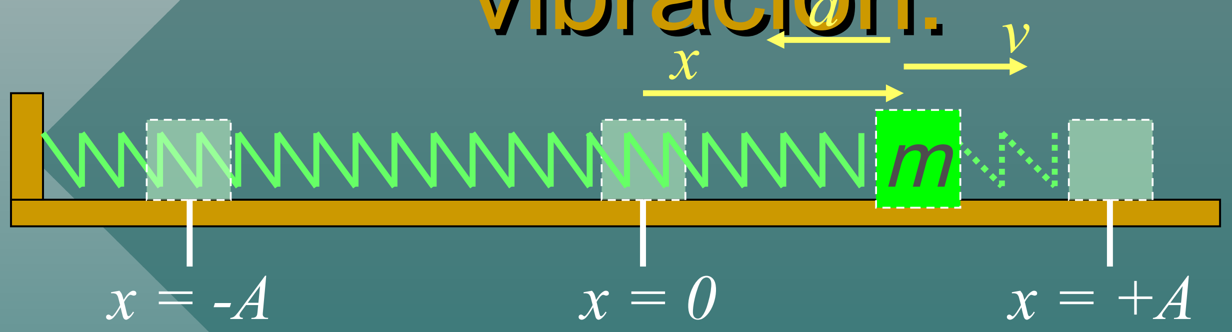
$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} \qquad v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}A$$

$$x = A\cos(2\pi ft) \qquad a = -4\pi^2 f^2 x$$

$$v = -2\pi fA\,\mathrm{sen}(2\pi ft)$$

Resumen: Periodo y frecuencia para resorte en vibración.

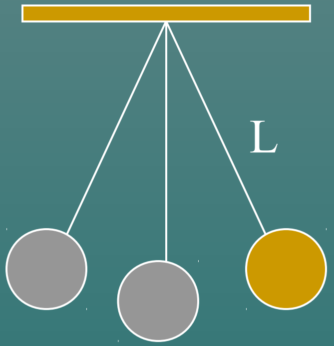


$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{-a}{x}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{-x}{a}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

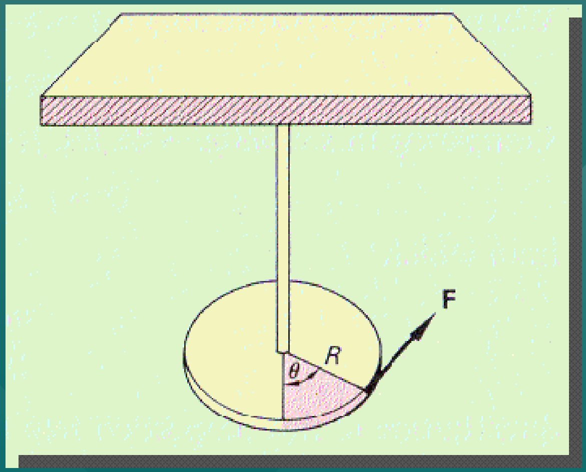
Resumen: Péndulo simple y péndulo de torsión

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k'}}$$



CONCLUSIÓN: Capítulo 14
Movimiento armónico simple