Análisis Matemático I
Clase 5: Continuidad y clasificación de discontinuidades. Teorema del valor intermedio. Introducción a asíntotas

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2024

Propiedades de las funciones continuas

Teorema

Supongamos que f y g son funciones definidas en un intervalo abierto I que contiene a c y que son continuas en $x = c$. Entonces las siguientes funciones son continuas en $x = c$:

- las funciones suma $f + g$ y diferencia $f - g$;
- las funciones multiplicación por constante $k.f$ ($k \in \mathbb{R}$) y producto $f.g$;
- la función cociente f/g, siempre que $g(c) \neq 0$;
- la función potencia f^n, donde $n \in \mathbb{N}$,
- la función raíz $\sqrt[n]{f}$, siempre que esté definida en un intervalo que contiene a c.

No demostrar

Ejemplos. Polinomios. Funciones racionales. Funciones trigonométricas.

Concepto de discontinuidad

Si una función f no es continua en un punto c, entonces decimos que f es discontinua en c y que c es un punto de discontinuidad de f.

Observemos que c no pertenece necesariamente al dominio de f. En este curso, analizaremos la discontinuidad de functiones en puntos de su dominio y en puntos que se encuentran en el *borde o frontera* del dominio. Ejemplificaremos esto en la próxima diapositiva.

Continuidad y discontinuidad

Ejemplo: analizar la continuidad de:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)}.$$

Continuidad y discontinuidad

Ejemplo: analizar la continuidad de:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)}.$$

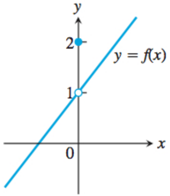
Solución: observar que la función g no asigna imagen a $x = 0$ y $x = 2$ (en esos puntos se anula el denominador). Luego, g no es continua en dichos puntos.
Además, dado que g es un cociente de funciones continuas (ambas son polinomios), la propiedad 3 del teorema de la diapositiva 14 nos dice que g es continua en todo punto que no anule el denominador. En conclusión, g es continua en:

$$\mathbb{R} - \{0, 2\}.$$

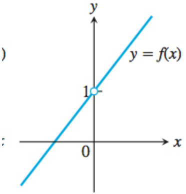
Observación: si bien $x = 0$ y $x = 2$ no pertenecen al dominio de g, analizamos la discontinuidad de g allí porque son puntos **borde o frontera** del dominio de g.

- **Discontinuidad Evitable (se puede salvar la discontinuidad)**
  - $f(c)$ y $\lim_{x\to c} f(x)$ existen pero:

$$f(c) \neq \lim_{x\to c} f(x).$$



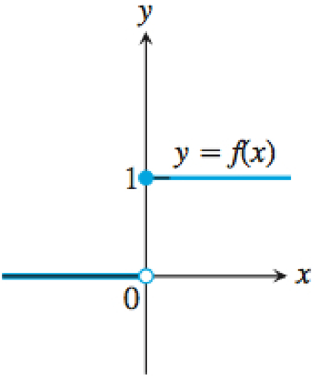
  - $f(c)$ no existe (es decir, c no pertenece al dominio de f), pero $\lim_{x\to c} f(x)$ sí existe:



Clasificación de discontinuidades

- **Discontinuidad de Salto (NO se puede salvar la discontinuidad)**
  - $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe pero:

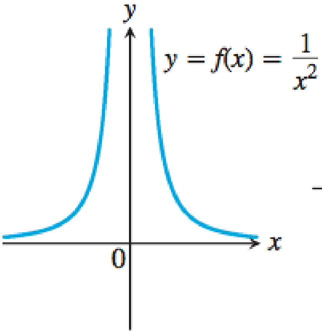
$$\lim_{x\to c^-} f(x) \text{ y } \lim_{x\to c^+} f(x) \text{ existen.}$$

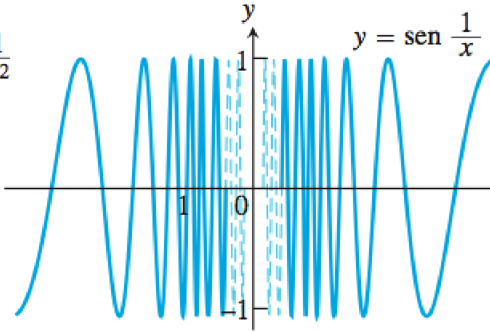


Observación: no interesa si f está o no definida en c.

- **Discontinuidad esencial (NO se puede salvar la discontinuidad)**
  - Al menos uno de los límites laterales no existe. Es decir:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \text{ o } \lim_{x\to c^+} f(x) \text{ no existe.}$$





Observación: no interesa si f está o no definida en c.

Ejemplo: clasificar las discontinuidades de:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)}.$$

Ejemplo: clasificar las discontinuidades de:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)}.$$

Solución: anteriormente se obtuvo que g es discontinua en $x = 0$ y $x = 2$. Veamos qué tipo de discontinuidad tenemos en cada caso.
-Para $x = 2$: analizamos los límites laterales

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x+2)}{x} = 2$$

y

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x+2)}{x} = 2.$$

Por lo tanto

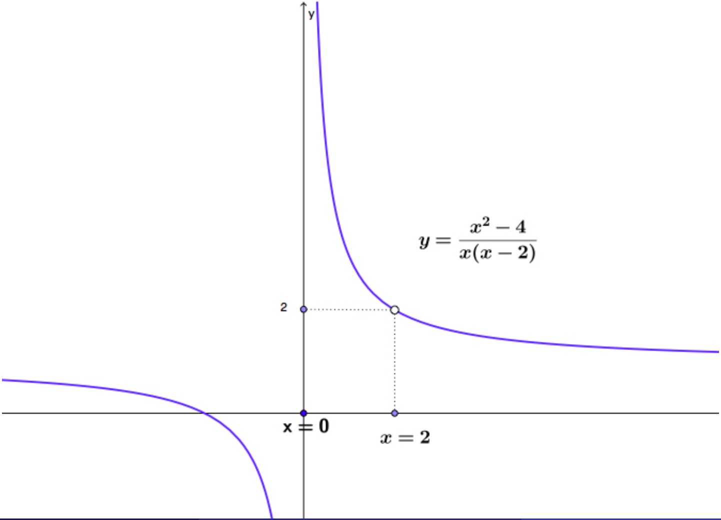
$$\lim_{x \to 2} g(x) = 2$$

y g tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

-Para $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x+2)}{x} = +\infty$$

por ende la discontinuidad de g en $x = 0$ es esencial.



Propiedades de las funciones continuas: Teorema del Valor Intermedio

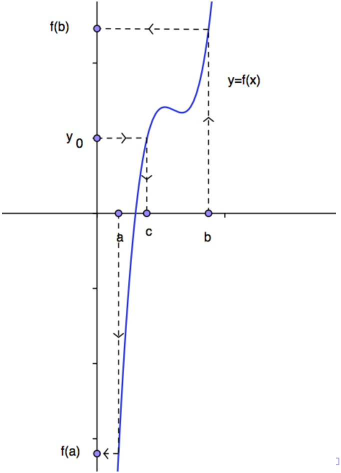
Motivación:

- ¿Existe x tal que:
$$x^5 - 10x^2 + 3x - 1 = 0?$$
- ¿Existe x tal que la ecuación:
$$\sqrt{2x+5} = 4 - x^2$$
se satisface?

Teorema del valor intermedio

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Sea y_0 un número real entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que:

$$f(c) = y_0.$$



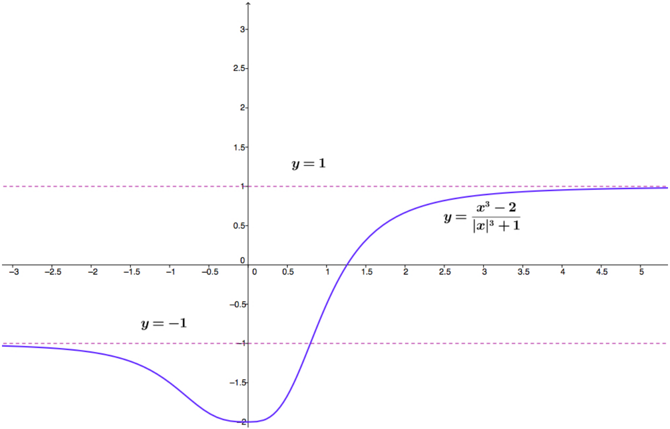
Teorema del valor intermedio

Ahora podemos aplicar el Teorema del Valor Intemedio para la resolución de las preguntas de motivación. Más adelante veremos otras aplicaciones del teorema.

- ¿Existe x tal que:
$$x^5 - 10x^2 + 3x - 1 = 0?$$
Introducimos la función:
$$f(x) = x^5 - 10x^2 + 3x - 1$$
que es continua en $\mathbb{R}$. Observar que:
$$f(0) < 0 \quad \text{y} \quad f(3) > 0.$$
Tomando $y_0 = 0$ en el teorema del valor intermedio, se tiene la existencia de $c \in [0, 3]$ tal que:
$$f(c) = 0.$$
Así, $x = c$ resuelve la ecuación:
$$x^5 - 10x^2 + 3x - 1 = 0.$$

Asíntotas horizontales

Considere el siguiente gráfico:



La distancia (vertical) entre las imágenes de $y = \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$ **y de la recta** $y = 1$ **tiende a cero a medida que** x **se hace cada vez mayor.**

Asíntotas horizontales

Definición de Asíntota Horizontal

Decimos que la recta horizontal $y = b$ es una asíntota horizontal de la función $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b,$$

o:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Observación: los dos límites anteriores se pueden escrbir como:

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x) - b| = 0,$$

o:

$$\lim_{x \to -\infty} |f(x) - b| = 0.$$

Así, la recta $y = b$ es una asíntota horizontal de $y = f(x)$ si la distancia entre b y los valores de la función $f(x)$ tiende a cero cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$.

Asíntotas horizontales

Ejemplo: determine las asíntotas horizontales de:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}.$$

Solución: cuando se desea obtener un límite de la forma:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios, entonces se divide el numerador y el denominador por x elevada al grado del denominador. Este procedimiento permite eliminar potencias y simplificar los términos. Apliquemos lo anterior para calcular el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}.$$

Primero observe que como $x \to +\infty$, se tiene que $|x| = x$ y entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{x^3 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3 - 2}{x^3}}{\frac{x^3 + 1}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}}.$$

Cuando x tiende a $+\infty$, los cocientes:

$$\frac{1}{x^3} \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{x^3}$$

tienden a cero. Así:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = 1.$$

Por lo tanto, $y = 1$ es una asíntota horizontal de f.

Asíntotas horizontales

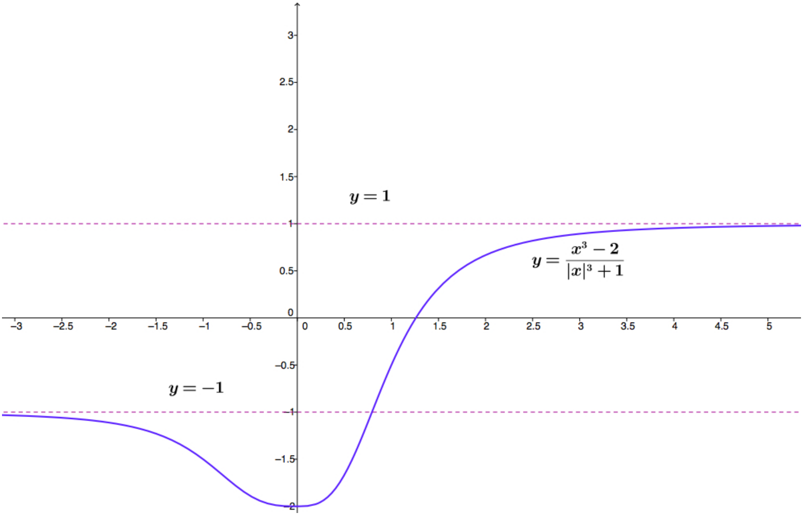
En forma similar y observando que cuando $x \to -\infty$ el valor absoluto de x es $-x$, se obtiene:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{|x|^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{(-x)^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{-x^3+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{2}{x^3}}{-1+\frac{1}{x^3}} = \frac{1-0}{-1+0} = -1.$$

Así, $y=-1$ es otra asíntota horizontal de f.

Asíntotas horizontales



Observar que la gráfica de una función puede cortar a la asíntota.

Eejercicio para hacer en el aula: encuentre y clasifique las discontinuidades de

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Además, compruebe si f tiene asíntotas horizontales.