Carrera: "INGENIERÍA EN MECATRÓNICA"

Cátedra: "Sistemas de Automatización"

MODELOS DE SISTEMAS

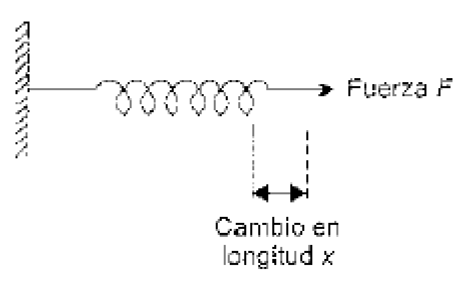
- Los modelos de sistemas son ecuaciones que representan la relación entre la entrada y la salida de un sistema.
- En esta presentación se considerará una variedad de sistemas, en los que incluiremos ejemplos de los tipos mecánicos, eléctricos, térmicos y fluídicos.
- Puesto que existen similitudes en el comportamiento de los bloques funcionales empleados en los sistemas mecánicos, eléctricos, térmicos y fluídicos, no se requieren formas diferentes de “bloques funcionales matemáticos” para los diferentes tipos de sistemas.
- Este capítulo trata los bloques funcionales básicos y su combinación para producir modelos matemáticos para sistemas físicos reales.

MODELOS DE SISTEMAS

BLOQUES FUNCIONALES DE SISTEMAS MECÁNICOS

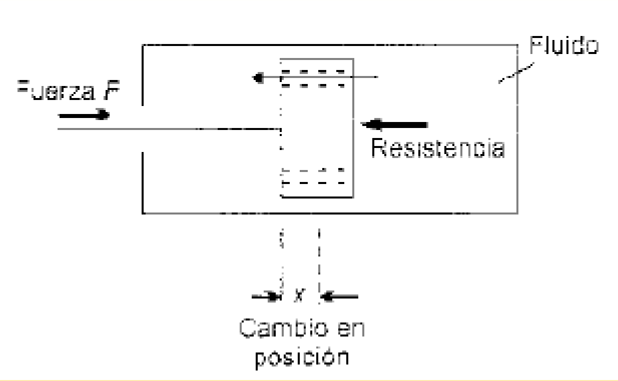
- Las formas básicas de bloques funcionales de *sistemas mecánicos* son: resortes, amortiguadores y masas.

- Los resortes representan la rigidez del sistema. Los amortiguadores, las fuerzas de oposición al movimiento (efecto de amortiguamiento o fricción). Las masas, la inercia o resistencia a la aceleración.



$$F = kx$$

Cuanto mayor sea el valor de k, mayor será la fuerza para estirar o comprimir al resorte y así la rigidez será mayor.



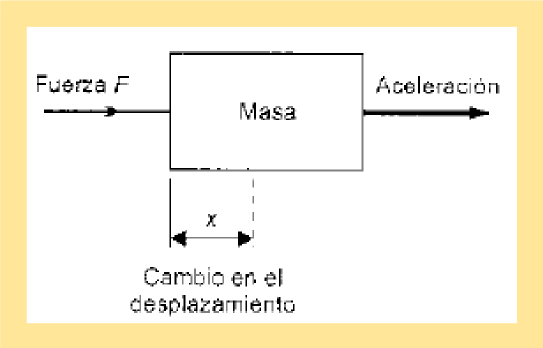
$$F = cv = c\frac{dx}{dt}$$

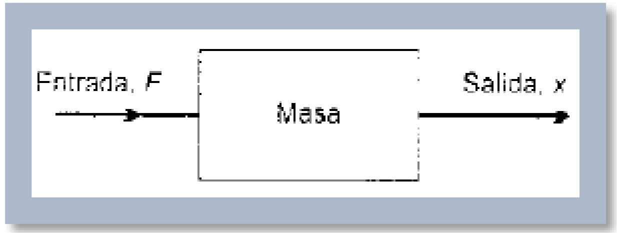
El movimiento del pistón requiere que el fluido pase de un lado a otro de éste. El flujo produce una fuerza resistiva. La fuerza resistiva/amortiguamiento es proporcional a la velocidad del pistón.

Cuanto mayor sea el valor de c, mayor será la fuerza de amortiguamiento para una velocidad en particular.

MODELOS DE SISTEMAS

BLOQUES FUNCIONALES DE SISTEMAS MECÁNICOS





$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Cuanto mayor sea el valor de m, mayor será la fuerza para producir una aceleración específica.

Para estirar un resorte, acelerar una masa y mover un pistón en el amortiguador se requiere energía. No obstante, en el caso del resorte y de la masa se obtiene energía de regreso, pero con el amortiguador esto no es posible.

- **RESORTE:** Cuando el resorte se estira, almacena energía que se libera cuando el resorte recupera su posición inicial: $F = kx$ $\quad E = \frac{1}{2}kx^2$ $\quad$ Tenemos: $E = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$

- **MASA:** Cuando la masa se mueve, se almacena energía cinética y se libera cuando la masa deja de moverse: $F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$ $\quad E = \frac{1}{2}mv^2$

- **AMORTIGUADOR:** No hay energía almacenada acá ya que el amortiguador no vuelve a su posición original. El amortiguador disipa energía en lugar de almacenarla. La potencia disipada depende la velocidad:

$$F = cv = c\frac{dx}{dt} \qquad P = cv^2$$

MODELOS DE SISTEMAS

BLOQUES FUNCIONALES DE SISTEMAS MECÁNICOS

- En caso de haber Rotación, entonces los 3 bloques funcionales equivalentes son: un resorte torsional, un amortiguador rotatorio y el momento de inercia (la inercia de una masa rotatoria).
- Con tales bloques, las entradas son pares “T” y las salidas son desplazamientos angulares “θ”

➢ RESORTE TORSIONAL: El desplazamiento angular es proporcional al par:

$$T = k\theta \qquad E = \frac{1}{2}\frac{T^2}{k}$$

➢ AMORTIGUADOR ROTATORIO: Un disco gira en un fluido y el par resistivo es proporcional a la velocidad angular:

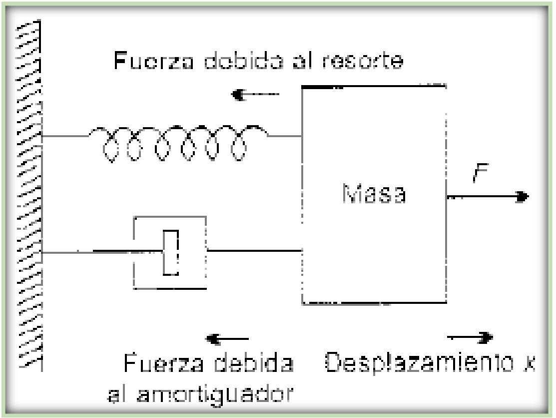
$$T = c\omega = c\frac{d\theta}{dt} \qquad P = c\omega^2$$

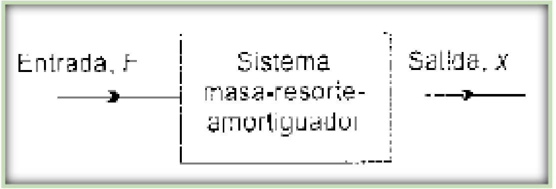
➢ MOMENTO DE INERCIA: Mientras mayor sea el momento de inercia “I”, mayor será el par para producir una aceleración angular “α”

$$T = m\alpha = m\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad E = \frac{1}{2}I\omega^2$$

MODELOS DE SISTEMAS

FORMACIÓN DE UN MODELO PARA UN SISTEMA MECÁNICO





Fuerza neta aplicada sobre m es $\mathrm{F} = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$ Luego: $m\frac{d^2x}{dt^2} = F - kx - c\frac{dx}{dt}$

Reordenando: $$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F$$

Esta ecuación diferencial, describe la relación entre la fuerza “F” (entrada del sistema) y el desplazamiento “x” (salida del sistema).

En general, esta ecuación se escribe de diferente manera: las constantes m, c y k se reemplazan por otras constantes del sistema. En la ausencia de amortiguamiento, una masa m en el extremo de un resorte oscilaría en forma libre con una frecuencia natural ω_n dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sin embargo, el movimiento es amortiguado y se emplea un factor de amortiguamiento relativo “ε”, para definir el grado de amortiguamiento. Este factor está dado por:

$$\varepsilon = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

Así, la ecuación se convierte en:

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2\varepsilon}{\omega_n}\frac{dx}{dt} + x = \frac{F}{k}$$

MODELOS DE SISTEMAS

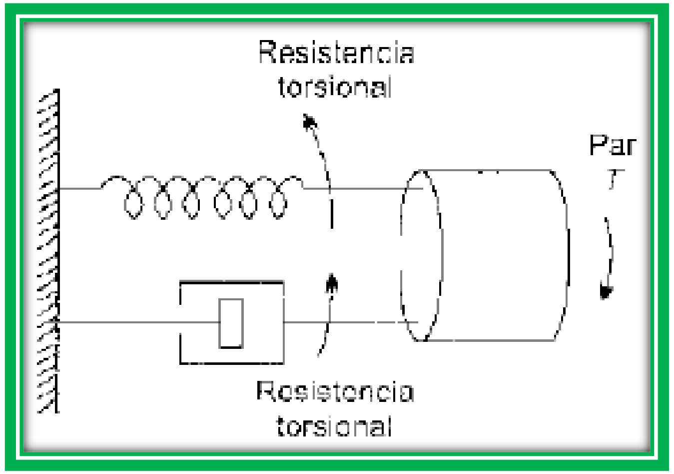
FORMACIÓN DE UN MODELO PARA UN SISTEMA MECÁNICO

Para sistemas rotacionales se pueden construir modelos similares:

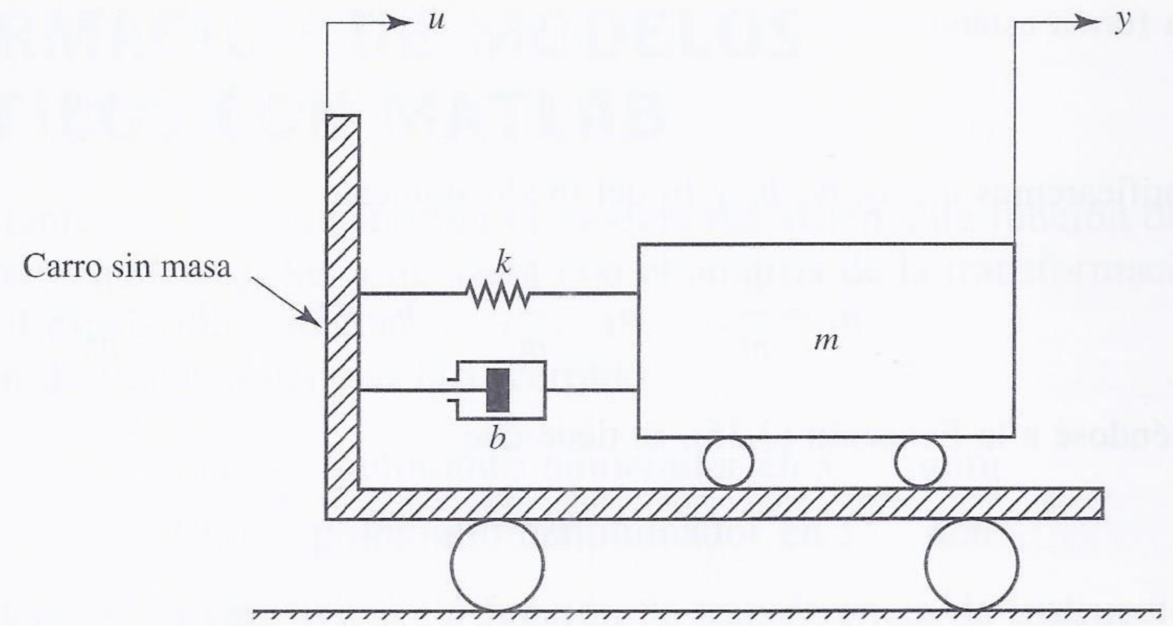
$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}+c\frac{d\theta}{dt}+k\theta=T \longrightarrow \frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{2\varepsilon}{\omega_n}\frac{d\theta}{dt}+\theta=\frac{T}{k}$$

Donde ω_n es la frecuencia natural de rotación y ε es el factor de amortiguamiento relativo para movimiento angular, definido como:

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{I}} \qquad \varepsilon=\frac{c}{2\sqrt{Ik}}$$



Sistema masa-resorte-amortiguador montado sobre un carro



$$ma = \sum F$$

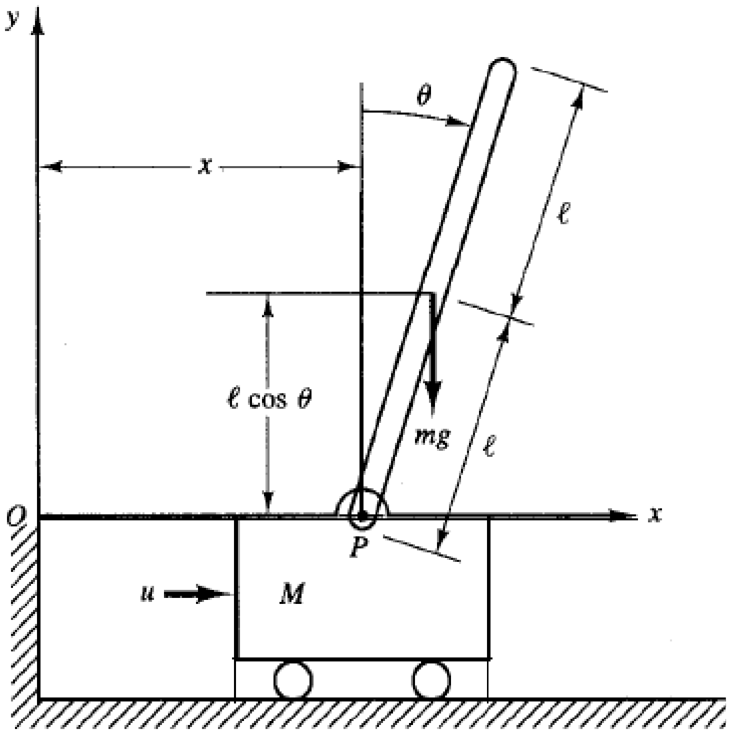
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -b\left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt}\right) - k(y - u)$$

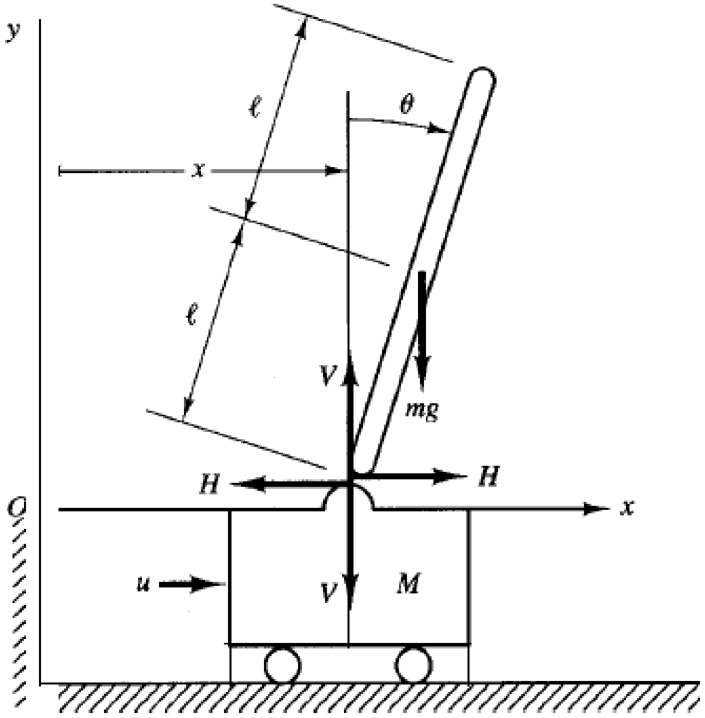
$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = b\frac{du}{dt} + ku$$

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs + k)U(s)$$

$$\text{Función de transferencia} = G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

Péndulo invertido





$$x_G = x + l \operatorname{sen} \theta$$

$$y_G = l \cos \theta$$

$$I\theta = Vl \operatorname{sen} \theta - Hl \cos \theta$$

Movimiento del centro de gravedad

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \operatorname{sen} \theta) = H$$

$$m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos \theta) = V - mg$$

$$I\theta = Vl\theta - Hl$$

$$m(\ddot{x} + l\theta) = H$$

$$0 = V - mg$$

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = u - H$$

$$(M + m)\ddot{x} + ml\theta = u$$

$$I\theta = mgl\theta - Hl$$

$$= mgl\theta - l(m\ddot{x} + ml\theta)$$

$$(I + ml^2)\theta + ml\ddot{x} = mgl\theta$$

Ejemplo de: la rueda de un auto o camión que se conduce por un camino

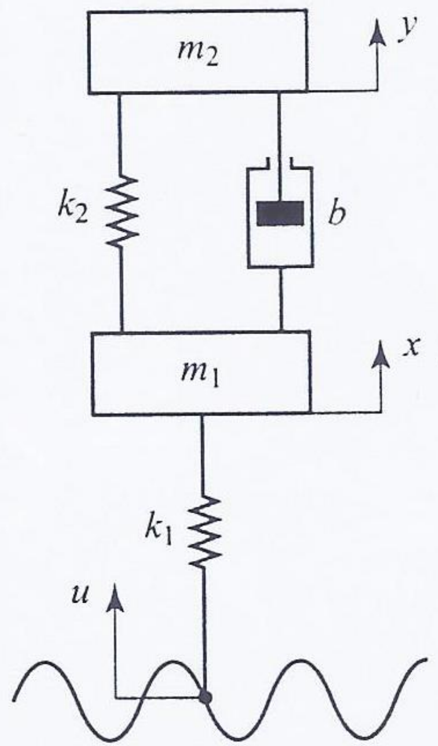


Figura 3.58. Sistema de suspensión.

$$m_1\ddot{x} = k_2(y - x) + b(\dot{y} - \dot{x}) + k_1(u - x)$$

$$m_2\ddot{y} = -k_2(y - x) - b(\dot{y} - \dot{x})$$

$$m_1\ddot{x} + b\dot{x} + (k_1 + k_2)x = b\dot{y} + k_2y + k_1u$$

$$m_2\ddot{y} + b\dot{y} + k_2y = b\dot{x} + k_2x$$

$$[m_1s^2 + bs + (k_1 + k_2)]X(s) = (bs + k_2)Y(s) + k_1U(s)$$

$$[m_2s^2 + bs + k_2]Y(s) = (bs + k_2)X(s)$$

$$(m_1s^2 + bs + k_1 + k_2)\frac{m_2s^2 + bs + k_2}{bs + k_2}Y(s) = (bs + k_2)Y(s) + k_1U(s)$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1(bs + k_2)}{m_1m_2s^4 + (m_1 + m_2)bs^3 + [k_1m_2 + (m_1 + m_2)k_2]s^2 + k_1bs + k_1k_2}}$$

MODELOS DE SISTEMAS

BLOQUES FUNCIONALES DE SISTEMAS ELÉCTRICOS

- Los bloques funcionales básicos de *sistemas eléctricos* pasivos son: inductores, capacitores y resistores.

✓ Para un inductor, la diferencia de potencial "v" a través de éste en cualquier instante depende de la tasa de cambio de la corriente que fluye por él:

$$v = L\frac{di}{dt}$$

donde L es la inductancia. La ecuación se puede reescribir como:

$$i = \frac{1}{L}\int vdt$$

✓ Para un capacitor, la diferencia de potencial "v" a través de éste depende del cambio de carga "q" entre las placas del capacitor en el instante considerado:

$$v = \frac{q}{C}$$

donde C es la capacitancia.

Puesto que la corriente "i", hacia el capacitor o desde éste es la tasa a la cual se mueve la carga hacia las placas del capacitor o desde éstas:

$$i = \frac{dq}{dt} \longrightarrow q = \frac{1}{C}\int idt \longrightarrow v = \frac{1}{C}\int idt$$

✓ Para un resistor, la diferencia de potencial "v" a través de éste en cualquier instante depende de la corriente "i" que fluye por él:

$$v = Ri$$

donde R es la resistencia.

MODELOS DE SISTEMAS

BLOQUES FUNCIONALES DE SISTEMAS ELÉCTRICOS

Tanto el inductor como el capacitor almacenan energía, la cual puede liberarse luego. No obstante, un resistor no almacena energía, sólo puede disiparla.

- **INDUCTOR:** La energía que se almacena en un inductor cuando hay una corriente "i" es:

$$E = \frac{1}{2}Li^2$$

- **CAPACITOR:** La energía que almacena un capacitor cuando hay una diferencia de potencial "v", a través de éste es:

$$E = \frac{1}{2}Cv^2$$

- **RESISTOR:** La potencia "P" que disipa un resistor cuando hay una diferencia de potencial "v", a través de éste es:

$$P = \frac{1}{R}v^2$$

FORMACIÓN DE UN MODELO PARA UN SISTEMA ELÉCTRICO

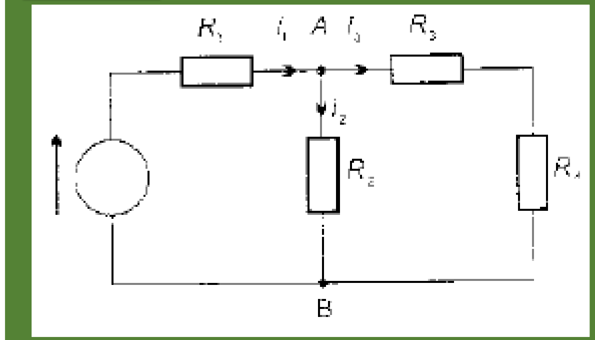
Las ecuaciones que describen cómo se pueden combinar los bloques funcionales eléctricos son las *leyes de Kirchhoff* las cuales se pueden expresar como:

I. Ley Nº1: La corriente total que fluye hacia una unión es igual a la corriente que fluye desde esa unión; es decir, la suma algebraica de las corrientes en la unión es cero.

II. Ley Nº2: En un circuito cerrado o malla, la suma algebraica de las diferencias de potencial a través de cada parte del circuito es igual a la fuerza electromotriz (f.e.m.) aplicada.

Una forma conveniente de utilizar la ley 1 es el llamado "análisis de los nodos", puesto que la ley se aplica a cada uno de los nodos principales de un circuito; y, un nodo principal es aquel en el que se encuentran 3 o más ramas del circuito.
Un modo conveniente de utilizar la ley 2 es el llamado "análisis de mallas", dado que la ley se aplica a cada una de las mallas (una malla es una trayectoria que no contiene ninguna otra trayectoria cerrada).

Ilustración del Análisis de Nodos:



$$i_1 R_1 = v - v_A \qquad i_1 = \frac{v - v_A}{R_1}$$

$$i_2 R_2 = v_A \qquad i_2 = \frac{v_A}{R_2}$$

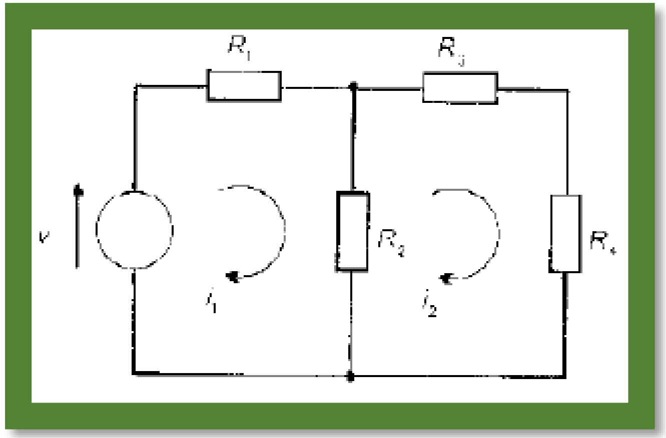
$$i_3(R_3 + R_4) = v_A \qquad i_3 = \frac{v_A}{(R_3 + R_4)}$$

$i_1 = i_2 + i_3$ Ley Nº1 de Kirchhoff

$$\frac{v - v_A}{R_1} = \frac{v_A}{R_2} + \frac{v_A}{(R_3 + R_4)}$$

FORMACIÓN DE UN MODELO PARA UN SISTEMA ELÉCTRICO

Ilustración del Análisis de Mallas:



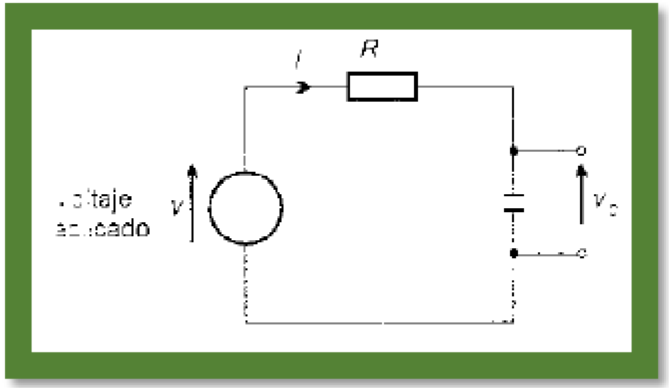
$$v = i_1R_1 + (i_1 - i_2)R_2 = i_1(R_1 + R_2) - i_2R_2 \quad (1)$$

$$0 = i_2R_3 + i_2R_4 + (i_2 + i_1)R_2 \quad \Rightarrow \quad i_2(R_3 + R_4 + R_2) = i_1R_2 \quad (2)$$

Sustituyendo i_2 de (2) en (1):

$$v = i_1(R_1 + R_2) - \frac{i_1R_2^2}{R_3R_4R_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{i_1(R_1R_3 + R_1R_4 + R_1R_2 + R_2R_3 + R_2R_4)}{R_3 + R_4 + R_2}}$$

Sistema eléctrico sencillo de 1 resistor + 1 capacitor:



$$v = v_R + v_C \quad \begin{cases} v_R\text{: diferencia de potencial a través del resistor} \\ v_C\text{: diferencia de potencial a través del capacitor} \end{cases}$$

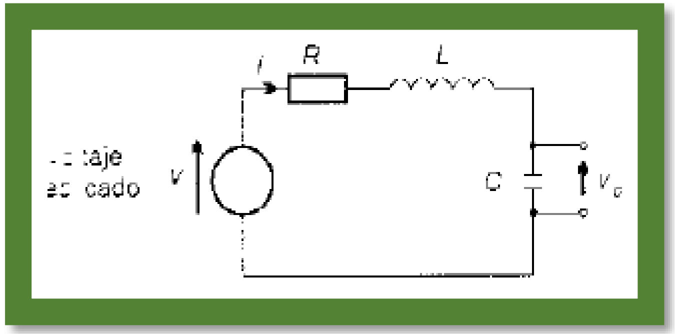
Puesto que el circuito tiene una sola malla, la corriente que pasa por todos los elementos del circuito será la misma "i":

$$v = iR + v_C \qquad i = C\frac{dv_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = RC\frac{dv_C}{dt} + v_C}$$

Esta ecuación establece la relación entre la salida v_C y la entrada v.

FORMACIÓN DE UN MODELO PARA UN SISTEMA ELÉCTRICO

Sistema eléctrico de 1 resistor + 1 capacitor + 1 inductor:



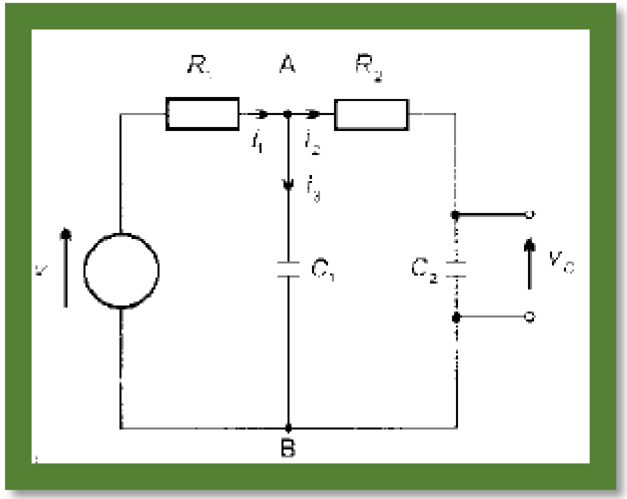
$$v = v_R + v_L + v_C$$

$$v = iR + L\frac{di}{dt} + v_C \qquad i = C\frac{dv_C}{dt} \qquad \frac{di}{dt} = C\frac{d^2v_C}{dt^2}$$

$$v = RC\frac{dv_C}{dt} + LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + v_C$$

Esta ecuación establece la relación entre la salida v_C y la entrada v.

Circuito eléctrico con 2 mallas:



Según el análisis de nodos:

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{v - v_A}{R_1}}_{i_1} = \underbrace{C_2\frac{dv_C}{dt}}_{i_2} + \underbrace{C_1\frac{dv_A}{dt}}_{i_3} \qquad (a)$$

$$v_A = i_2R_2 + v_C \quad \Rightarrow \quad v_A = R_2C_2\frac{dv_C}{dt} + v_C \qquad (b)$$

$$\frac{dv_A}{dt} = R_2C_2\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{dv_C}{dt} \qquad (c)$$

FORMACIÓN DE UN MODELO PARA UN SISTEMA ELÉCTRICO

Circuito eléctrico con 2 mallas:

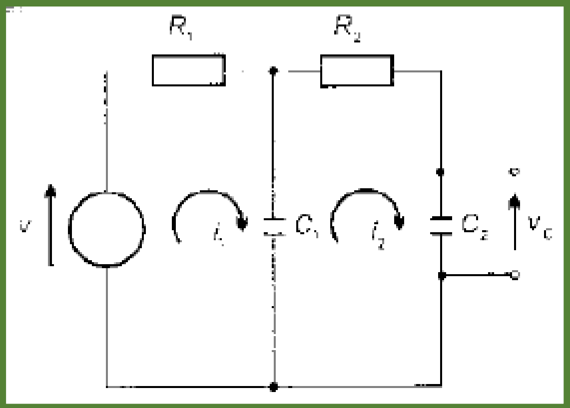
Sustituyendo (b) y (c) en (a):

$$\frac{v}{R_1} - \frac{R_2 C_2}{R_1}\frac{dv_C}{dt} - \frac{v_c}{R_1} = C_2 \frac{dv_C}{dt} + R_2 C_2 C_1 \frac{d^2 v_C}{dt^2} + C_1 \frac{dv_C}{dt}$$

Por lo tanto:

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \left(\frac{R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2}\right)\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_1 R_2 C_1 C_2} = \frac{v}{R_1 R_2 C_1 C_2}$$

Esta ecuación establece la relación entre la salida v_C y la entrada v.



Según el análisis de mallas:

$$v = i_1 R_1 + \frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)\, dt \quad \Longrightarrow \quad v = i_1 R_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1\, dt - \frac{1}{C_1}\int i_2\, dt \qquad (d)$$

Para la malla en la que circula la corriente i_2, la segunda ley de Kirchhoff da:

$$0 = i_2 R_2 + v_C + \frac{1}{C_1}\int (i_2 - i_1)\, dt \quad \Longrightarrow \quad 0 = i_2 R_2 + v_C + \frac{1}{C_1}\int i_2\, dt - \frac{1}{C_1}\int i_1\, dt \qquad (e)$$

MODELOS DE SISTEMAS

FORMACIÓN DE UN MODELO PARA UN SISTEMA ELÉCTRICO

Circuito eléctrico con 2 mallas:

Luego: $i_2 = C_2 \dfrac{dv_C}{dt} \quad (f)$ $\qquad v_C = \dfrac{1}{C_2}\int i_2 dt \Rightarrow v_C C_2 = \int i_2 dt \quad (g)$

Sustituyendo (f) en (e):

$$0 = C_2 R_2 \frac{dv_C}{dt} + v_C + \frac{C_2 v_C}{C_1} - \frac{1}{C_1}\int i_1\, dt$$

Al diferenciar esta ecuación se obtiene:

$$0 = C_2 R_2 \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{dv_C}{dt} + \frac{C_2}{C_1}\frac{dv_C}{dt} - \frac{i_1}{C_1}$$

Por lo tanto:

$$i_1 = C_1 C_2 R_2 \frac{d^2 v_C}{dt^2} + (C_1 + C_2)\frac{dv_C}{dt} \qquad (h)$$

Sustituyendo (h) en (d):

$$v = R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 v_C}{dt^2} + R_1 (C_1 + C_2)\frac{dv_C}{dt} + R_2 C_2 \frac{dv_C}{dt} + \frac{(C_1 + C_2)}{C_1} v_C - \frac{1}{C_1}\int i_2\, dt \qquad (i)$$

Sustituyendo (g) en (i) y reordenando:

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \left(\frac{R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2}\right)\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_1 R_2 C_1 C_2} = \frac{v}{R_1 R_2 C_1 C_2}$$

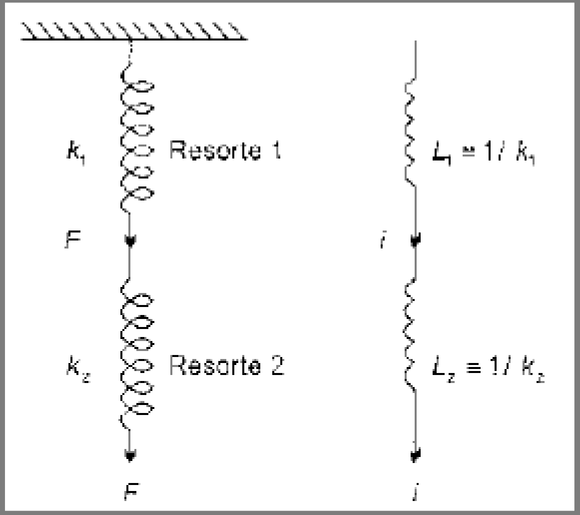
Esta ecuación establece la relación entre la salida v_C y la entrada v.

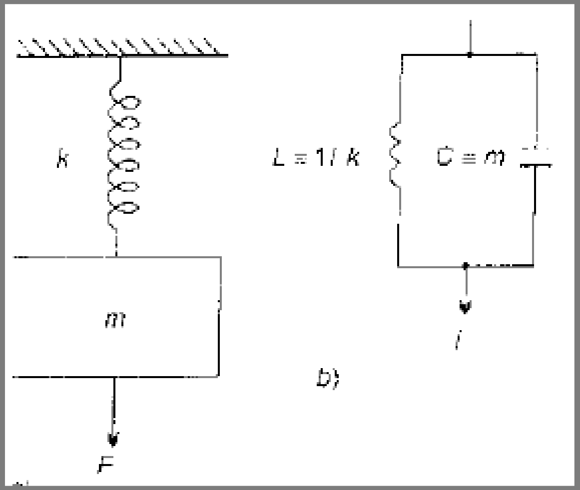
MODELOS DE SISTEMAS

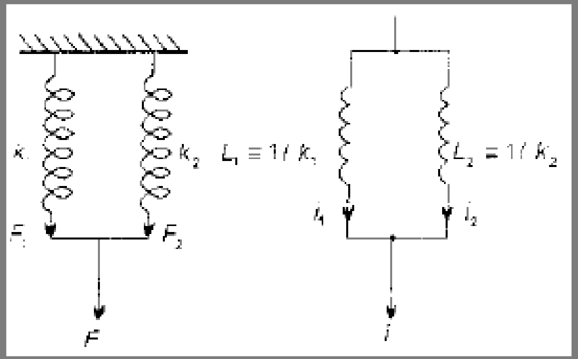
ANALOGÍAS ELÉCTRICAS Y MECÁNICAS

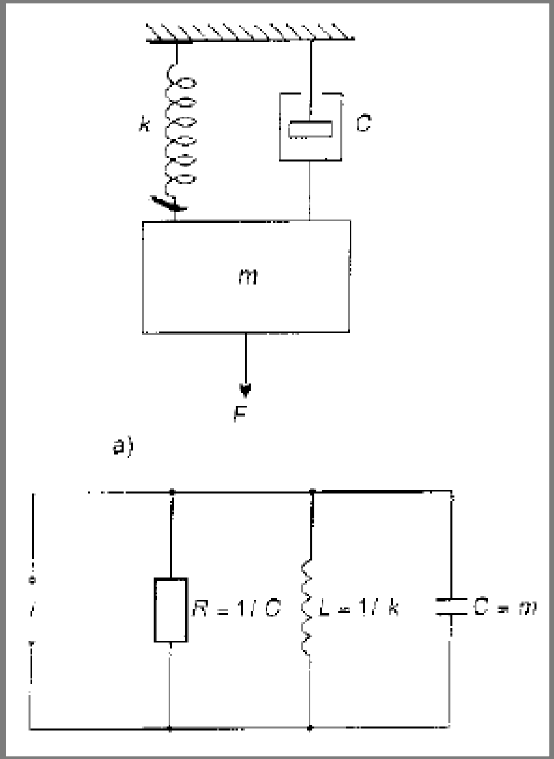
Bloque funcional	*Ecuación descriptiva*	*Energía/ potencia*	*CA**
Almacenamiento de energía			
Inductor	$i = \frac{1}{L}\int v\,dt$	$E = \frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{L}$
Resorte traslacional	$F = kx = k\int v\,dt$	$E = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$	k
Resorte torsional	$T = k\theta = k\int \omega\,dt$	$E = \frac{1}{2}\frac{T^2}{k}$	k
Capacitor	$i = C\frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Cv^2$	C
Masa	$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2}mv^2$	m
Momento de inercia	$T = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = I\frac{d\omega}{dt}$	$E = \frac{1}{2}I\omega^2$	I
Disipación de energía			
Resistor	$i = \frac{v}{R}$	$P = \frac{1}{R}v^2$	$\frac{1}{R}$
Amortiguador traslacional	$F = cv$	$P = cv^2$	c
Amortiguador rotacional	$T = c\omega$	$P = c\omega^2$	c

* Constante análoga.









BLOQUES FUNCIONALES DE SISTEMAS FLUÍDICOS

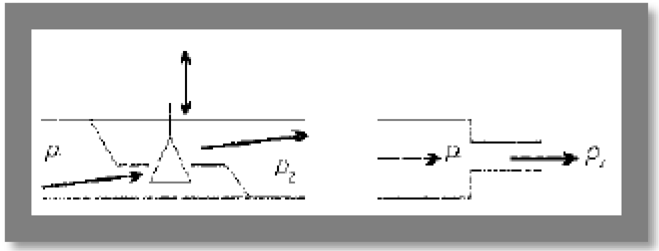
En sistemas de flujo de fluidos existen 3 bloques funcionales, los cuales se pueden considerar equivalentes de la resistencia, la inductancia y la capacitancia.

Para estos sistemas la entrada es la razón de flujo volumétrico (caudal "q"), y la salida, es la diferencia de presiones $(p_1 - p_2)$.

Los sistemas fluídicos se pueden considerar en 2 categorías: los hidráulicos (donde el fluido es un líquido que se considera incompresible) y los neumáticos (donde el fluido es un gas que puede ser compresible y presenta cambios de densidad)

Con Sistemas Hidráulicos:

- La ***resistencia hidráulica*** es la resistencia a fluir que se presenta como resultado de un flujo de líquido a través de válvulas o cambios de diámetros de las tuberías.



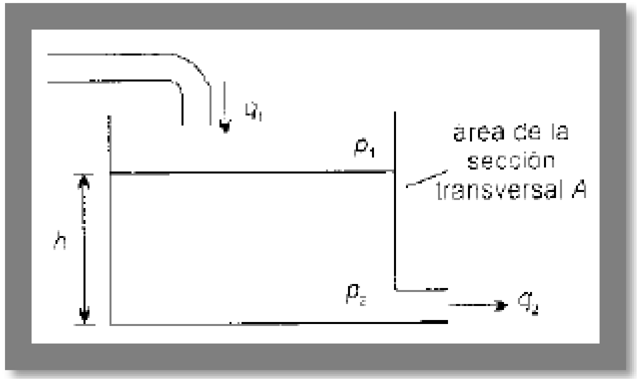
$p_1 - p_2 = Rq$,donde R es la resistencia hidráulica.

A mayor resistencia hidráulica mayor es la diferencia de presiones para dar un determinado caudal.

MODELOS DE SISTEMAS

BLOQUES FUNCIONALES DE SISTEMAS FLUÍDICOS

- La *capacitancia hidráulica* es el término que se emplea para describir el almacenamiento de energía con el líquido, donde ésta se almacena en forma de energía potencial.



Para esta capacitancia, la tasa de cambio del volumen (V) en el contenedor; es decir, dV/dt, es igual a la diferencia entre el caudal q_1 al que el líquido entra en el tanque, y el caudal q_2 al que el líquido deja el tanque.

$$q_1 - q_2 = \frac{dV}{dt} = \frac{d(Ah)}{dt} = A\frac{dh}{dt}$$

Pero la diferencia de presiones entre la entrada y la salida es p, donde: $p = h\rho g \Rightarrow h = \dfrac{p}{\rho g}$, luego….

$$q_1 - q_2 = A\frac{d\left(\frac{p}{\rho g}\right)}{dt} = \frac{A}{\rho g}\frac{dp}{dt}$$

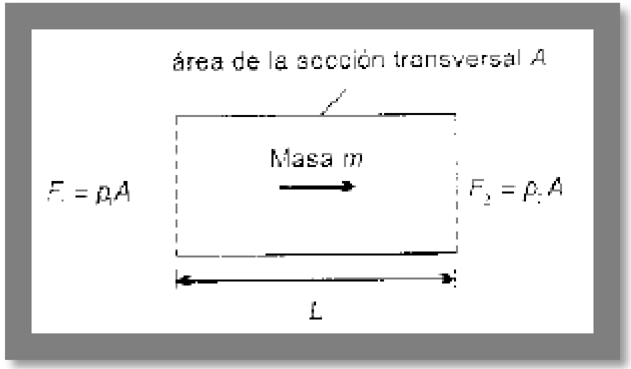
Acá se está considerando al líquido incompresible (por ende su ρ no cambia).

La capacitancia hidráulica se define como: $C = \dfrac{A}{\rho g} \Rightarrow q_1 - q_2 = C\dfrac{dp}{dt}$

Al integrar esta ecuación se obtiene: $p = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int (q_1 - q_2)dt$

BLOQUES FUNCIONALES DE SISTEMAS FLUÍDICOS

- La ***inertancia (inercia) hidráulica*** es el equivalente a la inductancia en sistemas eléctricos o a un resorte en sistemas mecánicos. Para acelerar un fluido y así incrementar su velocidad, se requiere de una fuerza.



$$F_1 - F_2 = F_{neta} \quad \Rightarrow \quad p_1A - p_2A = ma \quad \Rightarrow \quad (p_1 - p_2)A = ma$$

$$(p_1 - p_2)A = \underbrace{AL\rho}_{m}\underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a}$$

Dado que q $= Av$, luego: $(p_1 - p_2)A = A^2L\rho\frac{dq}{dt}$

La inertancia hidráulica se define como: $I = \frac{L\rho}{A} \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_2 = I\frac{dq}{dt}$

Con Sistemas Neumáticos:

Los 3 bloques funcionales son, al igual que en sistemas hidráulicos, resistencia, capacitancia e inertancia. Sin embargo, los gases difieren de los líquidos en que son compresibles (es decir, un cambio en la presión produce un cambio en el volumen y, por lo tanto, en la densidad).

- La ***resistencia neumática*** R se define en términos de la razón entre la diferencia de presiones $(p_1 - p_2)$ y el flujo másico $\dot{m}$ como:

$$p_1 - p_2 = R\dot{m}$$,donde R es la resistencia neumática.

MODELOS DE SISTEMAS

BLOQUES FUNCIONALES DE SISTEMAS FLUÍDICOS

- La ***capacitancia neumática*** C se debe a la compresibilidad del gas. Si hay un flujo másico $\dot{m}_1$ que entra al contenedor de volumen V y la razón de flujo másico $\dot{m}_2$ que sale de éste, entonces la razón a la cual está cambiando la masa en el contenedor es:

$$Tasa\ de\ cambio\ de\ la\ masa\ en\ el\ contenedor = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 = \frac{d(\rho V)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{m}_1 - \dot{m}_2 = \frac{\rho dV}{dt} + \frac{V d\rho}{dt}$$

Tanto ρ como V pueden variar con el tiempo.

Para un gas ideal $\mathrm{pV} = mRT$, en consecuencia $\mathrm{p} = \frac{mRT}{V} = \rho RT$, y así: $\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{RT}\frac{dp}{dt}$

Luego: $$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = \underbrace{\rho\frac{dV}{dp}\frac{dp}{dt}}_{dV/dt} + \frac{V}{RT}\frac{dp}{dt} \qquad \boxed{\frac{d\rho}{dt}} \quad \Rightarrow \quad \dot{m}_1 - \dot{m}_2 = \left(\rho\frac{dV}{dp} + \frac{V}{RT}\right)$$

La capacitancia neumática por el cambio en el volumen del contenedor (C_1) se define como: $$C_1 = \rho\frac{dV}{dp}$$

La capacitancia neumática debida a la compresibilidad del gas (C_2) se define como: $$C_2 = \frac{V}{RT}$$

Por lo tanto: $$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = (C_1 + C_2)\frac{dp}{dt}$$ O bien: $$p_1 - p_2 = \frac{1}{(C_1 + C_2)}\int(\dot{m}_1 - \dot{m}_2)dt$$

MODELOS DE SISTEMAS

BLOQUES FUNCIONALES DE SISTEMAS FLUÍDICOS

- La ***inertancia (inercia) neumática*** se debe a la caída de presión necesaria para acelerar un bloque de gas. Según la segunda ley de Newton:

$$F_{neta} = \frac{d(mv)}{dt} \quad \Rightarrow \quad (p_1 - p_2)A = \frac{d(mv)}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$(p_1 - p_2)A = \frac{d\left[\overbrace{\rho L A}^{m} * \overbrace{\left(\frac{q}{A}\right)}^{v}\right]}{dt} \quad \Rightarrow \quad (p_1 - p_2)A = L\frac{d(\rho q)}{dt}$$

Pero $\dot{m} = \rho q$ y de este modo: $(p_1 - p_2) = \frac{L}{A}\frac{d\dot{m}}{dt} \quad \Rightarrow$

$$(p_1 - p_2) = I\frac{d\dot{m}}{dt} \qquad I = \frac{L}{A} = Inertancia\ Neumática$$

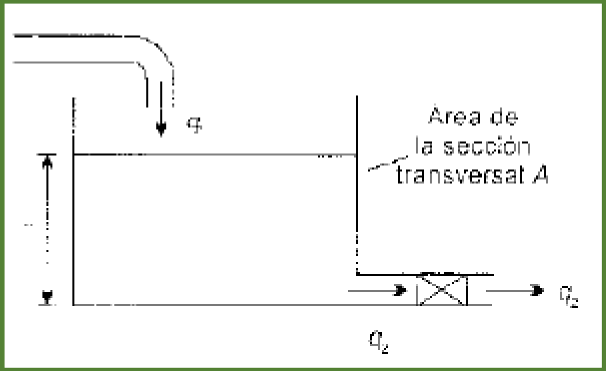
Tanto para sistemas hidráulicos como neumáticos, la diferencia de presión es análoga a la diferencia de potencial en sistemas eléctricos. Las inertancias y capacitancias son elementos que almacenan energía y las resistencias son disipadores de energía

Bloque funcional	*Ecuación descriptiva*	*Energía/ potencia*	*CA**
Almacenamiento de energía			
Inductor	$i = \frac{1}{L}\int v\,dt$	$E = \frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{L}$
Inertancia hidráulica	$q = \frac{1}{L}\int (p_1 - p_2)dt$	$E = \frac{1}{2}Iq^2$	$\frac{1}{L}$
Inertancia neumática	$\dot{m} = \frac{1}{L}\int (p_1 - p_2)dt$	$E = \frac{1}{2}I\dot{m}^2$	$\frac{1}{L}$
Capacitor	$i = C\frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Cv^2$	C
Capacitancia hidráulica	$q = C\frac{d(p_1 - p_2)}{dt}$	$E = \frac{1}{2}C(p_1 - p_2)^2$	C
Capacitancia neumática	$\dot{m} = C\frac{d(p_1 - p_2)}{dt}$	$E = \frac{1}{2}C(p_1 - p_2)^2$	C
Disipación de energía			
Resistor	$i = \frac{v}{R}$	$P = \frac{1}{R}v^2$	$\frac{1}{R}$
Resistencia hidráulica	$q = \frac{(p_1 - p_2)}{R}$	$P = \frac{1}{R}(p_1 - p_2)^2$	$\frac{1}{R}$
Resistencia neumática	$\dot{m} = \frac{(p_1 - p_2)}{R}$	$P = \frac{1}{R}(p_1 - p_2)^2$	$\frac{1}{R}$

* Constante análoga.

FORMACIÓN DE UN MODELO PARA UN SISTEMA FLUÍDICO

Para un Sistema Hidráulico:



Este sistema se puede considerar como un capacitor (el líquido en el tanque) con un resistor (la válvula). La inertancia se puede despreciar puesto que las tasas de cambio de flujo son muy lentas.

$$q_1 - q_2 = C\frac{dp}{dt} \qquad (1)$$

El caudal q_2 al cual el líquido sale del contenedor es el mismo que va a atravesar la válvula:

$$p = Rq_2 \qquad (2)$$

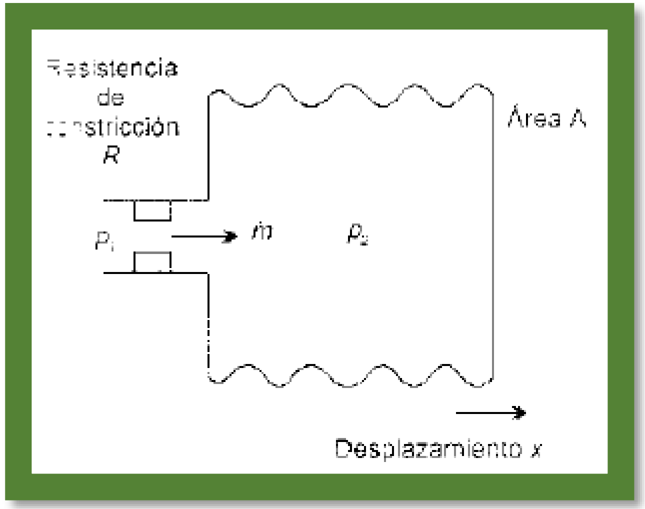
Sustituyendo q_2 de (2) en (1): $q_1 - \frac{p}{R} = C\frac{dp}{dt}$ Puesto que: $p = h\rho g$

Luego: $q_1 - \frac{h\rho g}{R} = C\frac{d(h\rho g)}{dt}$ Y dado que: $C = \frac{A}{\rho g}$ $\Rightarrow$ $q_1 = A\frac{dh}{dt} + \frac{h\rho g}{R}$

Esta última ecuación describe cómo la altura del líquido en el contenedor depende de la tasa de entrada del líquido en el mismo

FORMACIÓN DE UN MODELO PARA UN SISTEMA FLUÍDICO

Para un Sistema Neumático:



Este es sistema neumático sencillo. La resistencia la proporciona la constricción que restringe la razón de flujo de gas en el interior del fuelle. La capacitancia es provista por el propio fuelle. La inertancia se puede despreciar puesto que los cambios en la razón de flujo son lentos.

$$\dot{m} = \frac{p_1 - p_2}{R} \qquad (a)$$

donde p_1 es la presión antes de la constricción y p_2 la presión después de la constricción:

La capacitancia del fuelle está dada por: $\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = (C_1 + C_2)\dfrac{dp_2}{dt}$

Pero $\dot{m}_1$ es la razón de flujo másico $\dot{m}$ dada en la ecuación (a) y $\dot{m_2} = 0$ ya que no hay salida del gas del fuelle. Luego:

$$\frac{p_1 - p_2}{R} = (C_1 + C_2)\frac{dp_2}{dt} \Longrightarrow p_1 = R(C_1 + C_2)\frac{dp_2}{dt} + p_2 \quad (b)$$

Esta ecuación describe cómo la presión p_2 en el fuelle varía con el tiempo cuando hay una entrada de presión

El fuelle se expande o contrae como resultado de los cambios de presión dentro de éste. Un fuelle es una forma de resorte:

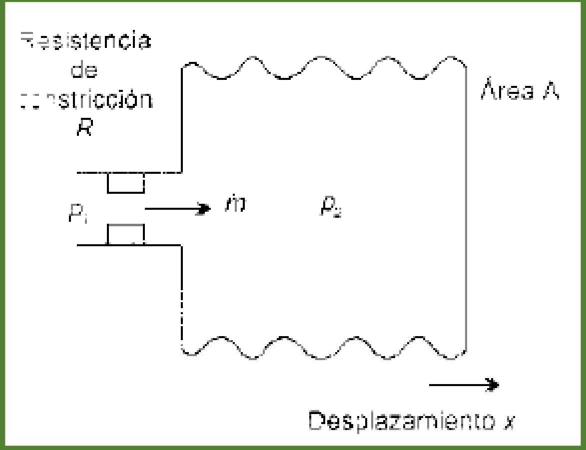
$F = kx$ donde k es la constante de resorte del fuelle. Luego: $p_2 A = kx \Longrightarrow p_2 = \dfrac{kx}{A} \quad (c)$

Reemplazando (c) en (b): $p_1 = \dfrac{Rk}{A}(C_1 + C_2)\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{k}{A}x$

Esta ecuación describe cómo la extensión o contracción del fuelle varía con el tiempo cuando hay una entrada de presión

FORMACIÓN DE UN MODELO PARA UN SISTEMA FLUÍDICO

Para un Sistema Neumático:



La capacitancia neumática debida al cambio en el volumen del contenedor C_1 está definida como:

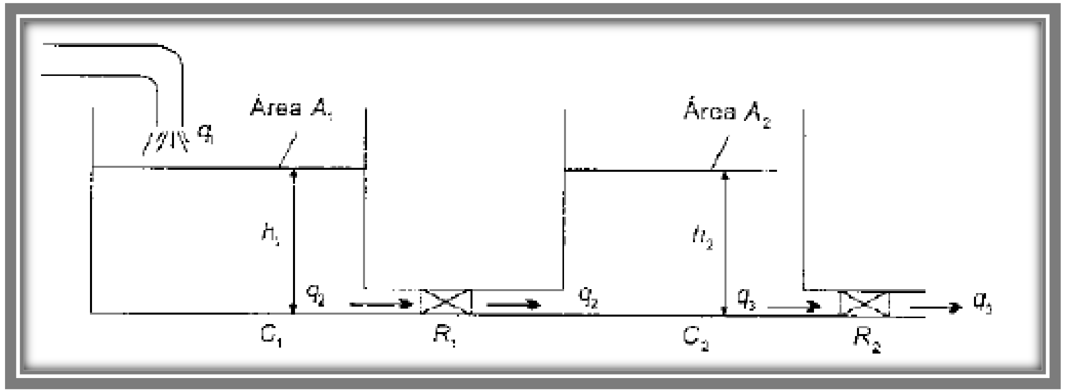
$$C_1 = \rho \frac{dV}{dp_2} = \rho A \frac{dx}{dp_2}$$

Pero para el fuelle: $p_2 A = kx$ de este modo:

$$\boxed{C_1 = \rho A \frac{dx}{d(\frac{kx}{A})} = \frac{\rho A^2}{k}}$$

$$\boxed{C_2 = \frac{V}{RT}}$$

EJEMPLO DE SISTEMA HIDRÁULICO CON 2 TANQUES



Obtener las relaciones que describan cómo las alturas de los líquidos en los contenedores cambian con el tiempo. La inertancia es despreciable.

$$q_1 - q_2 = C_1 \frac{dp}{dt} \qquad C_1 = \frac{A_1}{\rho g} \qquad p = h_1 \rho g \quad \Rightarrow \quad q_1 - q_2 = A_1 \frac{dh_1}{dt} \qquad (1)$$

El caudal q_2 al cual el líquido sale del tanque 1 es el mismo que va a atravesar la válvula R_1: $p = p_1 - p_2 = R_1 q_2$

La diferencia de presiones p en los dos lados de la válvula 1 es $h_1\rho g$ y $h_2 \rho g$: $(h_1 - h_2)\rho g = R_1 q_2 \Rightarrow q_2 = \frac{(h_1 - h_2)\rho g}{R_1}$

Reemplazando en (1): $q_1 - \frac{(h_1 - h_2)\rho g}{R_1} = A_1 \frac{dh_1}{dt}$

Esta ecuación describe cómo la altura del líquido en el tanque 1 depende del caudal de entrada q_1.

Para el Tanque 2: $q_2 - q_3 = C_2 \frac{dp}{dt} \qquad C_2 = \frac{A_2}{\rho g} \qquad p = h_2 \rho g \quad \Rightarrow \quad q_2 - q_3 = A_2 \frac{dh_2}{dt} \qquad (2)$

El caudal q_3 al cual el líquido sale del tanque 2 es el mismo que va a atravesar la válvula R_2: $p = p_2 - p_3 = R_2 q_3$

MODELOS DE SISTEMAS

EJEMPLO DE SISTEMA HIDRÁULICO CON 2 TANQUES

La diferencia de presiones p en los dos lados de la válvula 2 es $h_2\rho g$ y 0: $h_2\rho g = R_2 q_3$ ➡ $q_3 = \dfrac{h_2\rho g}{R_2}$

Reemplazando en (2): $$q_2 - \frac{h_2\rho g}{R_2} = A_2\frac{dh_2}{dt} \qquad (3)$$

Esta ecuación describe cómo la altura del líquido en el tanque 2 depende del caudal de entrada q_2 de dicho tanque

Del análisis del tanque 1se obtuvo que: $$q_2 = \frac{(h_1 - h_2)\rho g}{R_1} \qquad (4)$$

Reemplazando (4) en (3): $$\frac{(h_1 - h_2)\rho g}{R_1} - \frac{h_2\rho g}{R_2} = A_2\frac{dh_2}{dt}$$

Esta ecuación describe cómo cambia la altura del líquido en el tanque 2.

MODELOS DE SISTEMAS

BLOQUES FUNCIONALES DE SISTEMAS TERMICOS

Sólo hay 2 bloques funcionales básicos para sistemas térmicos: resistencia y capacitancia. Sólo hay flujo de calor neto entre 2 puntos si hay una diferencia de temperatura entre ellos (el equivalente eléctrico de esto es que fluye una corriente entre 2 puntos cuando existe una diferencia de potencial entre dichos puntos).

- ✓ La ***resistencia térmica*** R está dada por la razón de flujo de calor "q" y la diferencia de temperatura $(T_1 - T_2)$:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

El valor de R depende del modo en que se transfiere el calor:

I. En la conducción a través de un sólido y para conducción unidireccional:

$$q = Ak\frac{T_1 - T_2}{L} \begin{cases} A\text{: área de la sección transversal del material del cual se conduce el calor.} \\ L\text{: longitud del material entre los puntos cuyas temperaturas son } T_1 \text{ y } T_2. \\ k\text{: conductividad térmica.} \end{cases}$$

$$R = \frac{L}{Ak}$$

Resistencia Térmica (Conducción)

II. Cuando la transferencia de calor es por convección, como se lleva a cabo en líquido y gases:

$$q = Ah(T_1 - T_2) \begin{cases} A\text{: área superficial a través de la cual existe la diferencia de temperatura} \\ h\text{: coeficiente de transferencia de calor.} \end{cases}$$

$$R = \frac{1}{Ah}$$

Resistencia Térmica (Convección)

MODELOS DE SISTEMAS

BLOQUES FUNCIONALES DE SISTEMAS TERMICOS

- ✓ La ***capacitancia térmica*** C es una medida del almacenamiento de energía interna en un sistema. De este modo, si la razón de flujo de calor en el interior de un sistema es q_1 y la razón de flujo de calor que sale es q_2, entonces:

$$Tasa\ de\ cambio\ de\ la\ energía\ interna = q_1 - q_2$$

Un incremento en la energía interna significa un incremento en la temperatura. Por lo tanto:

$$Tasa\ de\ cambio\ de\ la\ energía\ interna = q_1 - q_2 = mc\frac{dT}{dt}$$

$\begin{cases} m\text{: masa.} \\ c\text{: capacidad calorífica específica.} \end{cases}$

De este modo: $$q_1 - q_2 = mc\frac{dT}{dt} = C\frac{dT}{dt}$$

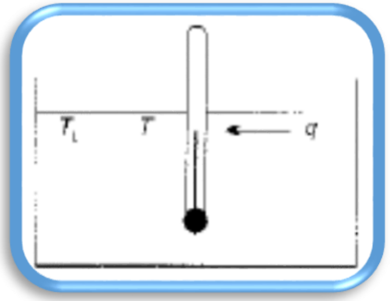
$C = mc$ **Capacitancia Térmica**

Bloque funcional	Ecuación descriptiva	Energía/potencia	CA*
Almacenamiento de energía			
Capacitor	$i = C\frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Cv^2$	C
Capacitancia térmica	$q_1 - q_2 = C\frac{dT}{dt}$	$E = CT$	C
Resistor	$i = \frac{v}{R}$	$P = \frac{1}{R}v^2$	$\frac{1}{R}$
Resistencia térmica	$q = \frac{(T_1 - T_2)}{R}$	$P = q = \frac{(T_1 - T_2)}{R}$	$\frac{1}{R}$

* Constante análoga.

MODELOS DE SISTEMAS

FORMACIÓN DE UN MODELO PARA UN SISTEMA TÉRMICO



Considere un termómetro a una Temperatura T que se sumerge en un líquido que está a una temperatura T_L. Si la resistencia térmica al flujo de calor del líquido al termómetro es R, entonces:

$$q = \frac{T_L - T}{R} \qquad (1)$$

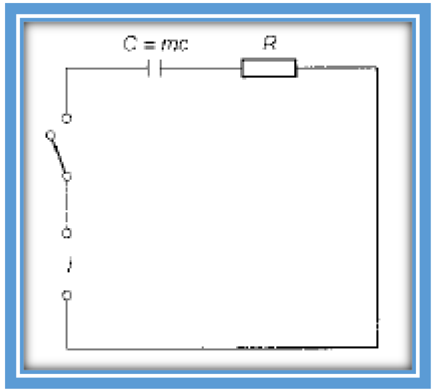
La capacitancia térmica C del termómetro está dad por: $q_1 - q_2 = C\frac{dT}{dt}$

Puesto que sólo hay un flujo de calor del líquido al termómetro, entonces $q_1 = q$ y $q_2 = 0$. Luego: $q = C\frac{dT}{dt}$ (2)

Al sustituir (1) en (2): $C\frac{dT}{dt} = \frac{T_L - T}{R}$ ➡ $RC\frac{dT}{dt} + T = T_L$

Esta ecuación describe cómo variará la temperatura T indicada por el termómetro cuando éste se sumerge en un líquido.

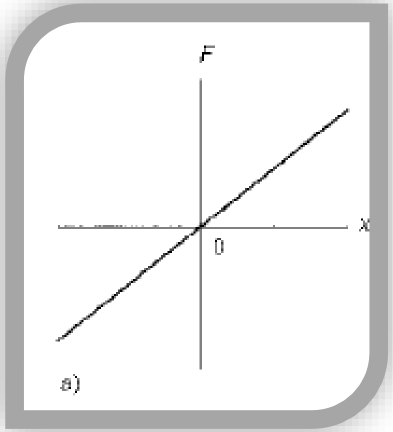
La analogía eléctrica de este sistema térmico es un circuito resistor-capacitor en serie. Cerrar el interruptor equivale a la acción de sumergir el termómetro en el líquido, sólo entonces la corriente y el calor empiezan a fluir. El cambio en la temperatura del termómetro desde su valor inicial equivale al cambio en la diferencia de potencial a través del capacitor.

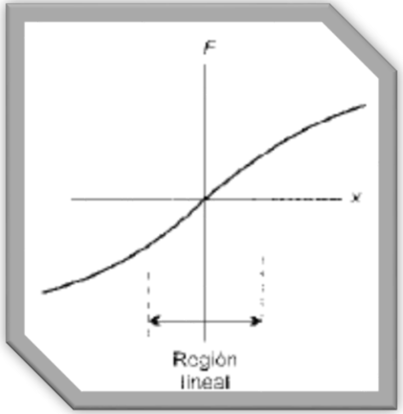


MODELOS DE SISTEMAS

LINEALIDAD

La relación entre la fuerza F y la deformación x producida por un resorte "ideal" es lineal y está dada por $F = kx$. Sin embargo, esta relación en un resorte (como cualquier otro componente real), no es lineal de manera perfecta. No obstante, existe un intervalo de operación para el cual se puede suponer linealidad:

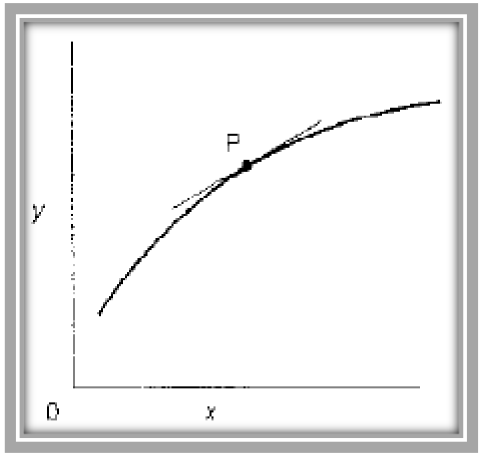




Para muchos componentes de sistemas, se puede suponer linealidad cuando el intervalo de las variables están alrededor de algún punto de operación.

Para tales componentes lo mejor que se puede hacer para obtener una relación lineal es considerar la pendiente de la gráfica en el punto de operación.

Por lo tanto, en el punto de operación P: $\Delta y = m\Delta x$



Así, por ejemplo, el caudal de un líquido a través de un orificio está dado por:

$$q = c_d A \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

Donde c_d es una constante conocida como coeficiente de descarga, A es el área transversal del orificio, ρ es la densidad del fluido y $(p_1 - p_2)$ la diferencia de presiones.

$$q = C\sqrt{(p_1 - p_2)}$$

Para un área de la sección transversal y una densidad constante. C es una constante. Ésta es una relación NO LINEAL entre el caudal y la diferencia de presiones.

LINEALIZACION

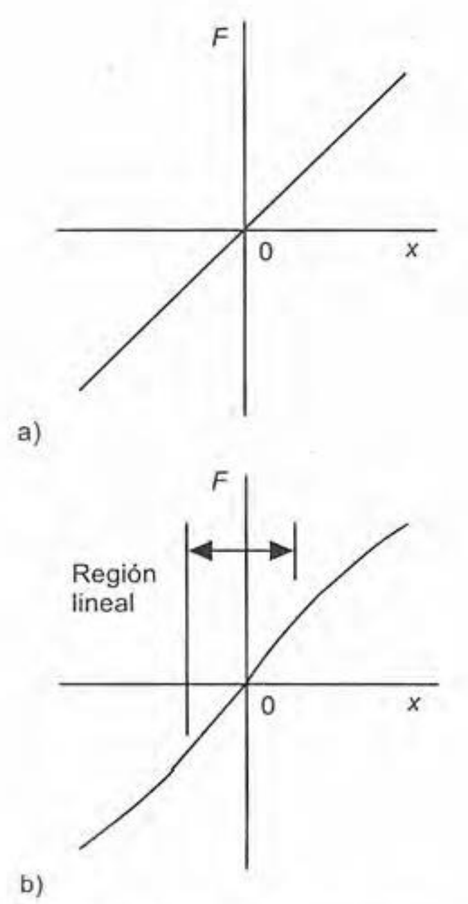


Figura 9.1 Resortes: a) ideal, b) real

La relación entre la fuerza y la deformación *x* producida en un resorte ideal es lineal y está dada por *F* = *kx.* Esto significa que si una fuerza F_i produce una deformación x_i y la fuerza *F2* produce una deformación *X2,* una fuerza igual a F_i + *F2* producirá una deformación *(*x_i *+ X2),* Esto se le llama *principio de superposición* y es una condición necesaria para que un sistema se pueda considerar un *sistema* l*ineal.*
Otra condición para que un sistema sea lineal es que si una entrada F_i produce una deformación entonces una entrada cF_i producirá una salida cX_i*,* donde c es una constante multiplicativa. La curva que resulta al graficar la fuerza *F* en función de la deformación *x* es una línea recta que pasa por el origen cuando la relación es lineal (figura 9,la),
Los resortes reales, como muchos otros componentes reales, no son perfectamente lineales (figura 9.1 b). Sin embargo, con frecuencia existe un intervalo de operación en el que la linealidad se puede suponer. Así para el resorte con la gráfica de la figura 9,1 b, se puede suponer linealidad siempre que el resorte se utilice sólo en la parte central de la gráfica. Para muchos componentes de sistemas es posible suponer la linealidad del funcionamiento dentro de un intervalo de valores de la variable en tomo a cierto punto de operación,

LINEALIZACION

Cualquier función se puede expandir en una serie de Taylor alrededor de un punto base como sigue:

$$f[x(t)] = f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} [x(t) - \bar{x}] + \frac{1}{2!} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{\bar{x}} [x(t) - \bar{x}]^2 + \cdots$$

donde $\bar{x}$ es el valor base de *x* alrededor del cual se expande la función. La linealización de la función *f[x(t)]* consiste en aproximarla utilizando tan sólo los dos primeros términos de la expansión en la serie de Taylor:

$$f[x(t)] \simeq f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} [x(t) - \bar{x}]$$

Ésta es la fórmula básica de linealización. Como $\bar{x}$ es una constante, el lado derecho de la ecuación es lineal en la variable *x(t).*

En la figura se da una interpretación gráfica de la fórmula de linealización.

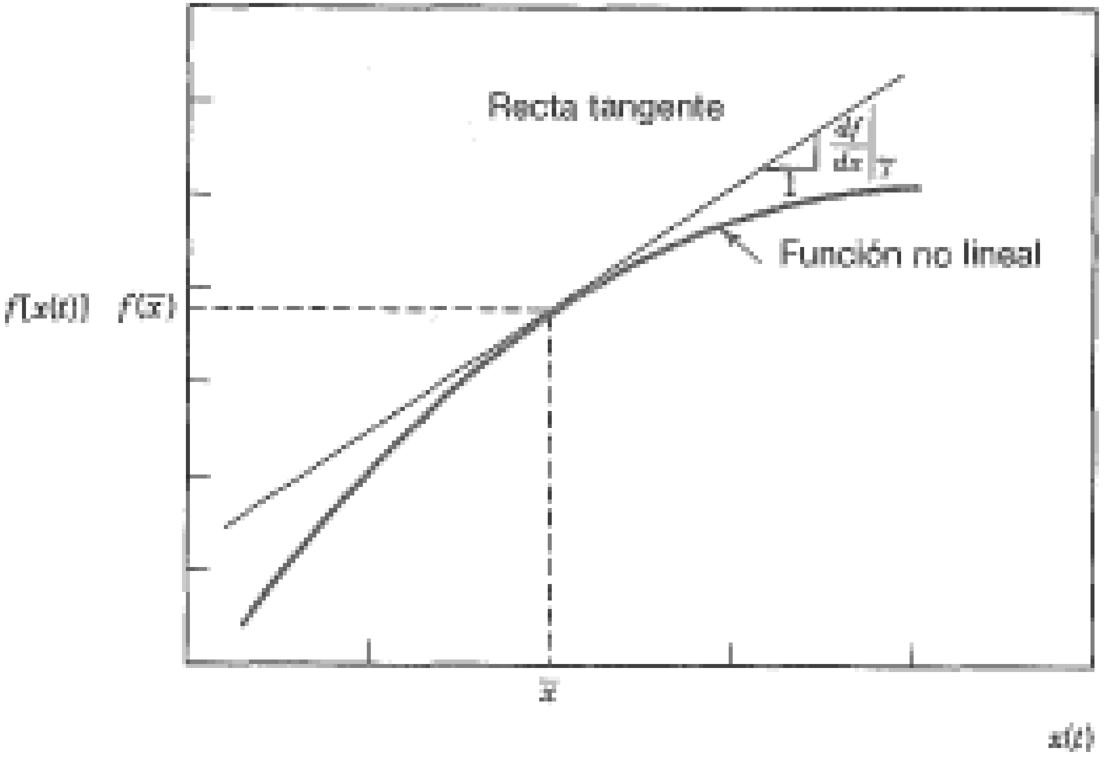
La aproximación lineal es una recta que pasa por el punto [$\bar{x}$,$f(\bar{x})$] con pendiente $\frac{df}{dx}|_{\bar{x}}$.

Esta recta es por definición tangente a f(x) en $\bar{x}$.

Note que la diferencia entre la función no lineal y su aproximación lineal es pequeña cerca del punto base $\bar{x}$ y que se hace más grande entre más

lejos se encuentre *x(t)* de $\bar{x}$. El rango en que la aproximación lineal es precisa depende de la función. La curvatura de algunas funciones es más pronunciada que la de otras y, en consecuencia,

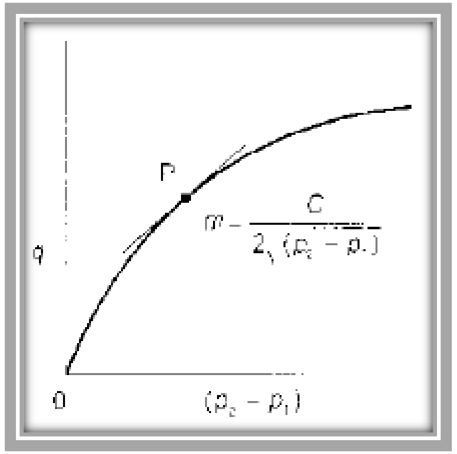
tienen un rango más estrecho en el que la aproximación lineal es precisa.



MODELOS DE SISTEMAS

LINEALIDAD

Es posible obtener una relación lineal considerando la pendiente de la siguiente gráfica en el punto de operación:



$$m = \frac{dq}{d(p_1 - p_2)} = \frac{d\left[C\sqrt{(p_1 - p_2)}\right]}{d(p_1 - p_2)} = \frac{C}{2\sqrt{(p_{o1} - p_{02})}} \qquad (a)$$

Donde $(p_{o1} - p_{02})$ es el valor en el punto de operación. Así, para pequeños cambios alrededor del punto de operación:

$$\Delta q = m\Delta(p_1 - p_2)$$

Donde m tiene el valor dado por la ecuación (a).

En el análisis anterior, se supuso que el área transversal del orificio era constante. Si el orificio es una válvula de control, el área ajusta para variar el caudal. Por ende: $q = CA\sqrt{(p_1 - p_2)}$

Y, para cambios alrededor del punto de operación, la pendiente de la gráfica de q contra A, sería:

$$m_1 = \frac{dq}{dA} = \frac{d\left[CA\sqrt{(p_1 - p_2)}\right]}{dA} = C\sqrt{(p_1 - p_2)}$$

Y, para cambios alrededor del punto de operación, la pendiente de la gráfica de q contra $(p_1 - p_2)$, sería:

$$m_2 = \frac{dq}{d(p_1 - p_2)} = \frac{d\left[CA\sqrt{(p_1 - p_2)}\right]}{d(p_1 - p_2)} = \frac{CA}{2\sqrt{(p_1 - p_2)}}$$

La versión linealizada de la ecuación es: $\Delta q = m_1\Delta A + m_2 A\Delta(p_1 - p_2)$

Los modelos matemáticos linealizados se utilizan debido a que la mayoría de las técnicas para sistemas de control se basan en que las relaciones de los elementos para dichos sistemas son lineales.