Carrera: “INGENIERÍA EN MECATRÓNICA”

Cátedra: “Sistemas de Automatización”

Para describir por completo el comportamiento de un sistema el modelo debe considerar la relación entre las entradas y las salidas, las cuales son funciones del tiempo y, por lo tanto, son capaces de describir los comportamientos tanto transitorio como en estado estable.

Así, se necesitará un modelo que indique cómo variará la respuesta del sistema con el tiempo. Un tipo de modelo que con frecuencia se emplea para describir el comportamiento de un sistema de control o de un elemento de un sistema de control es una "*ecuación diferencial*".

Este tema trata los tipos de respuestas que se pueden esperar de sistemas de primero y segundo orden, así como la solución de dichas ecuaciones diferenciales con el fin de obtener la respuesta del sistema ante diferentes tipos de entradas.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$\theta_0(s) = G(s) * \theta_i(s)$$

$$\theta_0(s) = \frac{C1}{s+p1} + \frac{C2}{s+p2} + \frac{C3}{s+p3} + \cdots . + \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b}$$

Al antitransformar:

$$\theta_0(t) = \underbrace{C1 * e^{-p1t} + C2 * e^{-p2t} + C3 * e^{-p3t}}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \cdots . + \underbrace{terminos\ de\ entrada}_{\text{Respuesta Forzada}}$$

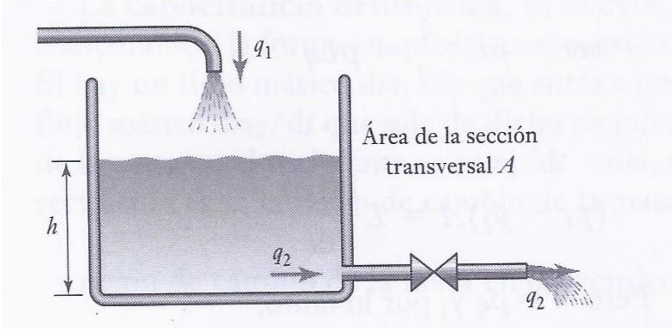
Modelos de primer orden

EJEMPLOS DE SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Ejemplo fluídico:

Un ejemplo de primer orden es un tanque de agua

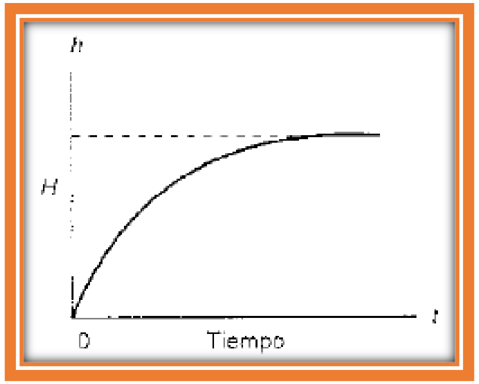
$$q_1 = A\frac{dh}{dt} + \frac{\rho g h}{R} \longrightarrow A\frac{dh}{dt} + \frac{\rho g}{R}h = q_1 \longrightarrow \boxed{\frac{AR}{\rho g}\frac{dh}{dt} + h = \frac{R}{\rho g}q_1}$$



Ante un aumento de q1 en forma escalón, se producirá un aumento del nivel.

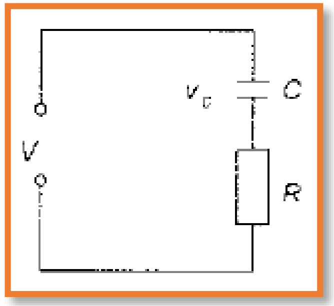
La ecuación que describe esta gráfica es:

$$\boxed{h = kq_1(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$



Ejemplo eléctrico:

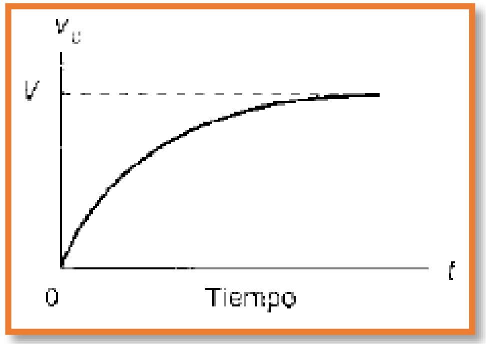
Un ejemplo de primer orden es un capacitor en serie con un resistor:



La razón de cambio de la diferencia de potencial v_c a través del capacitor con el tiempo es proporcional a la diferencia en valor entre v_c y el voltaje de entrada al sistema V.

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{RC}(V - v_c)$$

$$\boxed{v_c = V(1 - e^{-t/RC})}$$



MODELOS DE SISTEMAS DINÁMICOS

El orden de un elemento o sistema se puede definir como la máxima potencia de la derivada en la ecuación diferencial. De modo alternativo, el orden de un elemento o sistema se puede definir como la máxima potencia de s en el denominador de la función de transferencia.

Para un elemento de primer orden:

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b\theta_i$$

Para $\theta_o = 0$ en $t = 0$:

$$a_1 s\theta_o(s) + a_0\theta_o(s) = b\theta_i(s) \Rightarrow G(s) = \frac{b}{a_1 s + a_0}$$

Reordenando se obtiene: $G(s) = \dfrac{\frac{b}{a_0}}{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)s + 1}$

$$\boxed{G(s) = \frac{G_{ss}}{\tau s + 1}}$$

G_{ss} =K : Función transferencia en estado estable.

τ: Constante de tiempo del sistema

Ésta es la forma general que adopta la relación entrada-salida en el dominio de s para un sistema de primer orden.

Modelos de primer orden

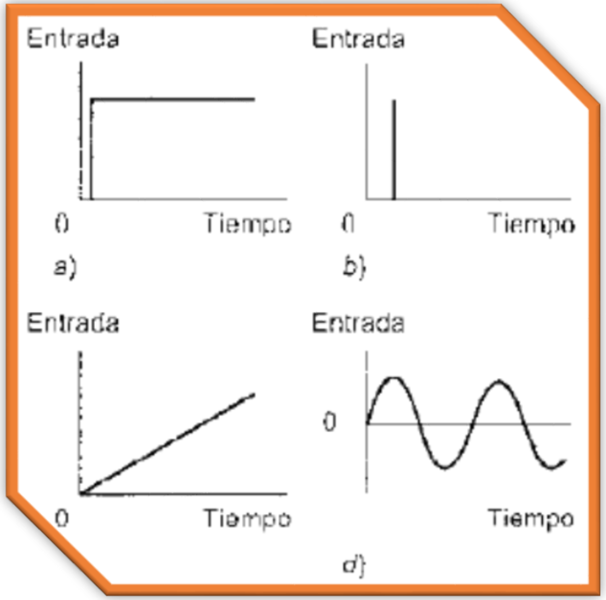
LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN

Una ecuación diferencial de primer orden es de la forma:

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b\theta_i$$

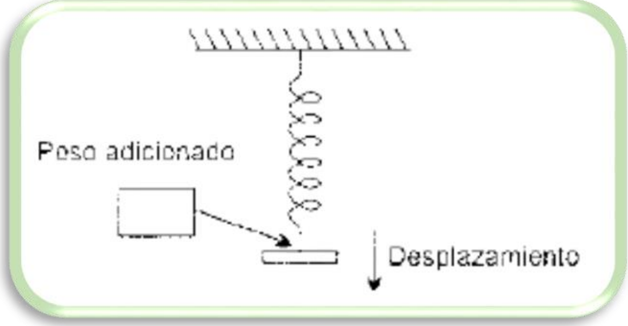
- a_1, a_0 y b son constantes.
- θ_i es la función de entrada al sistema.
- θ_o es la salida del sistema.
- $\frac{d\theta_o}{dt}$ es la razón de cambio a la cual la salida cambia con el tiempo.

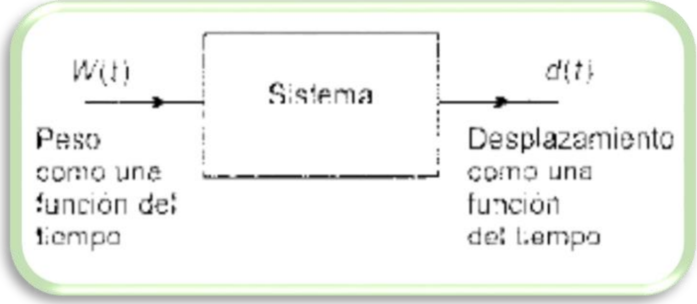
Las señales de entrada al sistema pueden adoptar diferentes formas. Una de las más comunes es la entrada escalón. Otras formas que a menudo se encuentran son las señales impulso, rampa y senoidal.



Respuestas de primer orden

- La respuesta de un sistema de control, o de un elemento del sistema, está formada de 2 partes: la respuesta en estado estable y la respuesta transitoria.
- La ***respuesta transitoria*** es la parte de la respuesta de un sistema que se presenta cuando hay un cambio en la entrada y desaparece después de un breve intervalo.
- La ***respuesta en estado estable*** es la respuesta que permanece después de que desaparecen todos los transitorios.

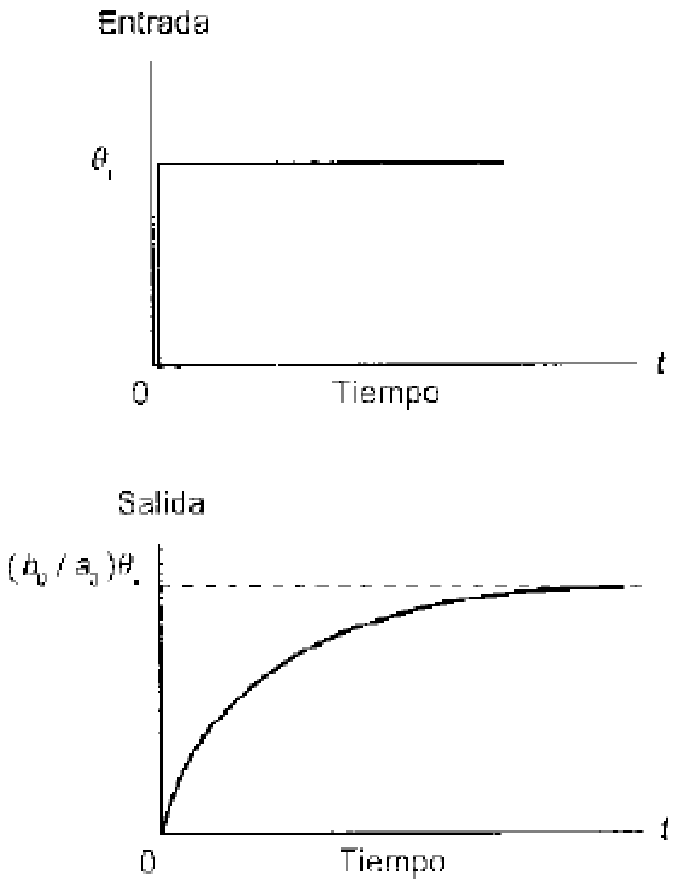




Respuestas de primer orden

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN

La siguiente gráfica muestra cómo varía θ_o con el tiempo para la entrada escalón. La gráfica y la ecuación son generales y describen la respuesta de todos los sistemas de primer orden a una entrada escalón que se presenta en $t = 0$:



Respuestas de primer orden

LAS CONSTANTES en una FUNCION DE 1° ORDEN

Se pueden usar las relaciones de $G_{ss} = \frac{b}{a_0}$ y $\tau = \frac{a_1}{a_0}$ para escribir la ecuación diferencial de primer orden en la forma:

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b\theta_i$$

$$\frac{a_1}{a_0}\frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = \frac{b}{a_0}\theta_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau\frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = G_{ss}\theta_i}$$

Respuestas de primer orden

RESPUESTA ESCALÓN DE UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN

$$Transf.\ de\ Laplace\ de\ la\ salida = \theta_o(s) = \frac{G}{\tau s + 1} * \theta_i(s) \Rightarrow \theta_o(s) = \frac{G}{\tau s + 1} * \frac{1}{s} \Rightarrow \theta_o(s) = G * \frac{\left(\frac{1}{\tau}\right)}{s\left[s + \left(\frac{1}{\tau}\right)\right]}$$

Por lo tanto, anti-transformando y, para una entrada escalón unitario, tenemos:

$$\theta_o(s) = G_{ss} * \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}\right]$$

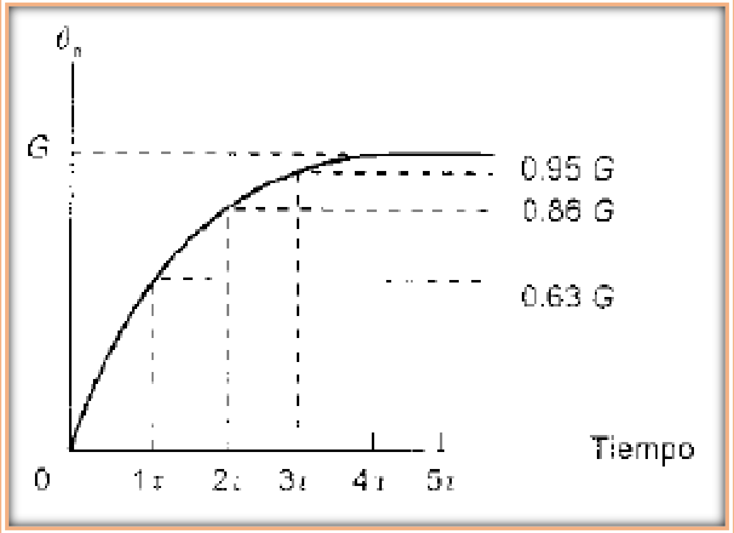
G_{ss}: Ganancia en estado estable o Ganancia estática

Para una entrada escalón de magnitud A, tenemos:

$$\theta_o(s) = AG * \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}\right]$$

$$\theta_o = G_{ss}\theta_i\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

Cuando el tiempo es $t = \frac{a_1}{a_0}$ entonces el término exponencial tiene el valor de 0,37 y $\theta_o = G_{ss}\theta_i(1 - 0{,}37) = 0{,}63 G_{ss}\theta_i$



En este tiempo, la salida ha alcanzado el 0,63 de su valor en estado estable y se denomina ***Constante de tiempo τ***.

Respuestas de primer orden

RESPUESTA RAMPA DE UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN

$$Transf.\ de\ Laplace\ de\ la\ salida = \theta_o(s) = \frac{G}{\tau s + 1} * \theta_i(s) \Rightarrow \theta_o(s) = \frac{G}{\tau s + 1} * \frac{1}{s^2} \Rightarrow \theta_o(s) = G * \frac{\left(\frac{1}{\tau}\right)}{s^2\left[s + \left(\frac{1}{\tau}\right)\right]}$$

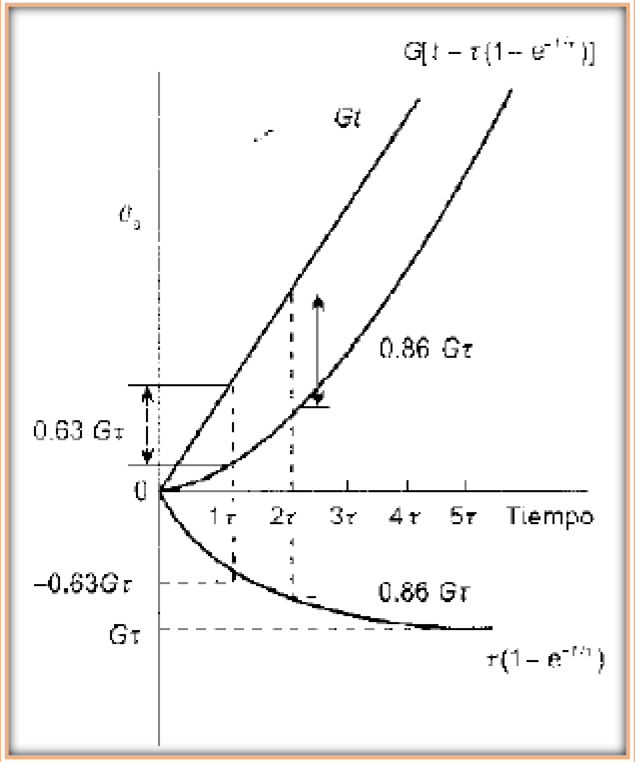
Por lo tanto, anti-transformando y, para una entrada rampa de pendiente unitaria, tenemos:

$$\theta_o(s) = G * \left[t - \tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right]$$

Para una entrada rampa de pendiente A, tenemos:

$$\theta_o(s) = AG * \left[t - \tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right]$$

La gráfica muestra al resultado final como una resta entre la recta Gt y la curva $G\tau\left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}\right]$.



Respuestas de primer orden

RESPUESTA IMPULSO DE UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN

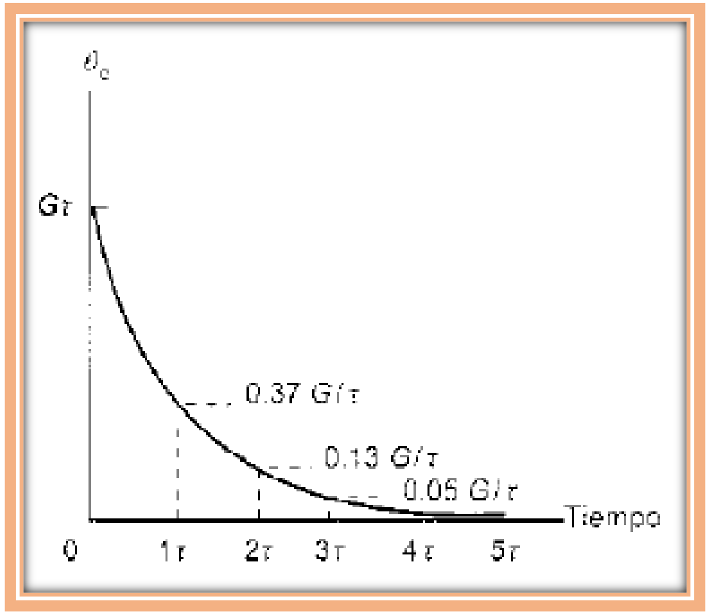
$$Transf.\ de\ Laplace\ de\ la\ salida = \theta_o(s) = \frac{G}{\tau s+1} * \theta_i(s) \Rightarrow \theta_o(s) = \frac{G}{\tau s+1} * 1 \Rightarrow \theta_o(s) = G * \frac{\left(\frac{1}{\tau}\right)}{\left[s+\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]}$$

Por lo tanto, anti-transformando y, para una entrada impulso unitario, tenemos:

$$\theta_o(s) = G\left(\frac{1}{\tau}\right) * e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}$$

Para una entrada impulso de magnitud A, tenemos:

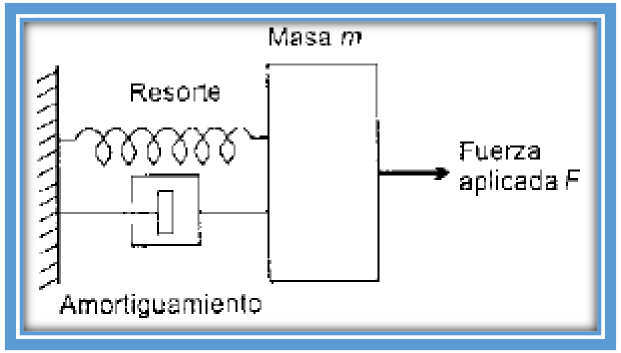
$$\theta_o(s) = AG\left(\frac{1}{\tau}\right) * e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}$$



EJEMPLOS DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Ejemplo mecánico:

Un ejemplo de segundo orden es una rueda de un auto:



$$\text{Fuerza neta} = F - kx - c\frac{dx}{dt}$$

Luego: $$m\frac{d^2x}{dt^2} = F - kx - c\frac{dx}{dt}$$

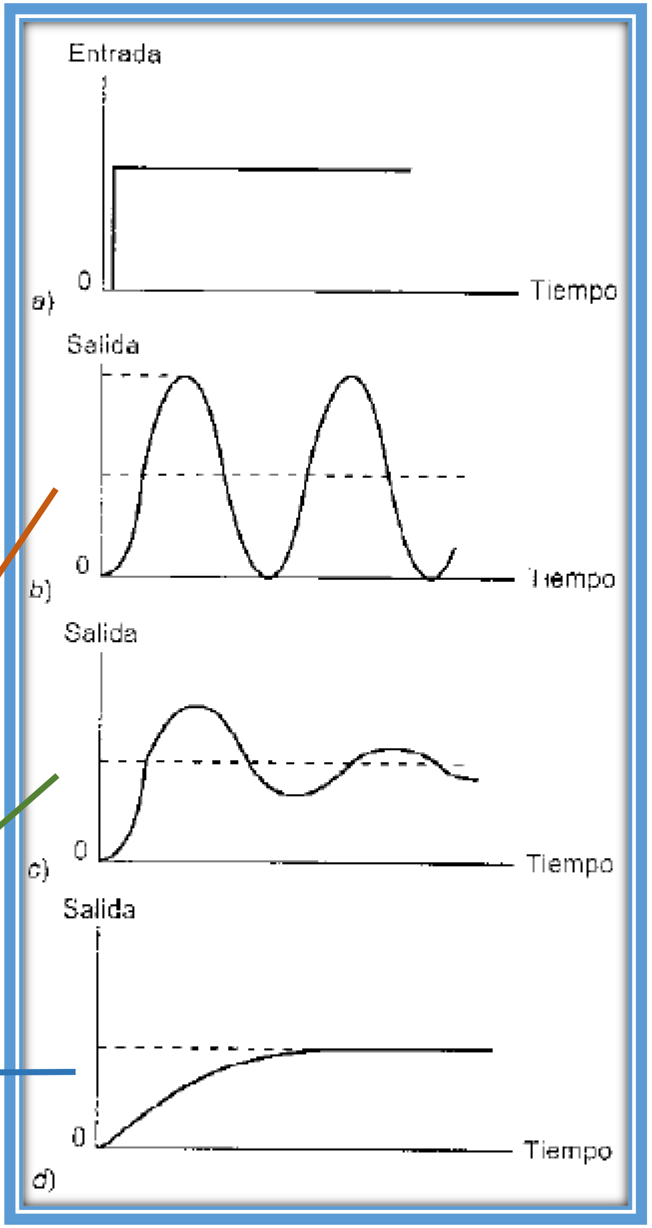
Reordenando: $$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F$$

Ésta es una ecuación diferencial de segundo orden de un sistema que tuvo una abrupta aplicación de la fuerza F, es decir, una entrada escalón.

Sin amortiguamiento, la masa oscilaría libremente sobre el resorte y las oscilaciones continuarían indefinidamente.

El amortiguamiento causará oscilaciones que desaparecen hasta que se obtiene el desplazamiento estable de la masa.

Si el amortiguamiento es lo suficientemente grande, no habrá oscilaciones y el desplazamiento de la masa se incrementará lentamente con el tiempo y la masa se moverá de manera gradual hacia la posición de desplazamiento estable.

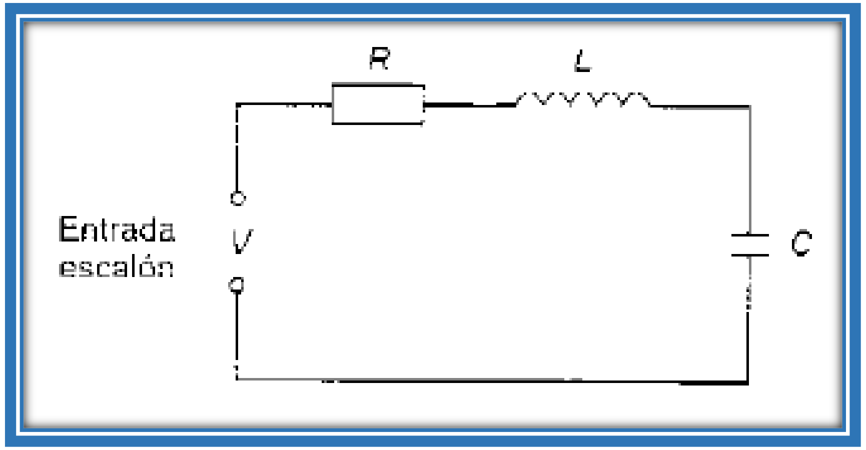


Modelos de segundo orden

EJEMPLOS DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Ejemplo eléctrico:

Un ejemplo de segundo orden es el amortiguamiento en el circuito RLC en serie. Para tal circuito, cuando está sujeto a una entrada escalón de magnitud V en $t = 0$, la corriente i está dada por:



$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{V}{LC}$$

El amortiguamiento en el circuito RLC está provisto por la resistencia. En ausencia de ésta, la corriente del circuito oscilará libremente y continuará de manera indefinida.

No obstante, la presencia de la resistencia causará oscilaciones que desaparecen hasta que se obtiene la corriente estable. Sin embargo, si la resistencia (amortiguamiento) es lo suficientemente grande no habrá oscilaciones.

LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN

Una ecuación diferencial de segundo orden es de la forma:

$$a_2 \frac{d^2\theta_o}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b\theta_i$$

a_2, a_1, a_0 y b son constantes.

θ_i es la función de entrada al sistema.

θ_o es la salida del sistema.

Modelos de segundo orden

FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE SEGUNDO ORDEN

Suponga un sistema en el que la entrada θ_i está relacionada con la salida θ_o mediante la ecuación diferencial:

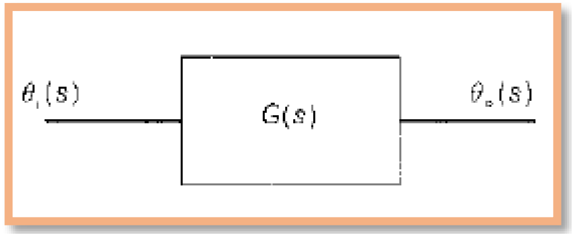
$$a_2\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + a_1\frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b\theta_i$$

Si todas las condiciones iniciales son cero, entonces la transformada de Laplace de esta ecuación es:

$$a_2 s^2\theta_o(s) + a_1 s\theta_o(s) + a_0\theta_o(s) = b\theta_i(s)$$

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = G(s) = \frac{b}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$G(s)$ es la función de transferencia de un sistema lineal que describe su comportamiento dinámico (suponiendo que todas las condiciones iniciales son cero).



- Para un sistema masa-resorte-amortiguador: $m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$
- Para un circuito resistor-capacitor-inductor: $LC\frac{d^2v_c}{dt^2} + RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = v \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$

Modelos de segundo orden

FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE SEGUNDO ORDEN

Para un elemento de segundo orden:

$$a_2 \frac{d^2\theta_o}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b\theta_i \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{b}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{\frac{b}{a_0}}{\left(\frac{a_2}{a_0}\right) s^2 + \left(\frac{a_1}{a_0}\right) s + 1} = \frac{G_{ss}}{\tau^2 s^2 + 2\tau\varepsilon s + 1}$$

La ecuación diferencial de segundo orden se puede escribir como:

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\varepsilon\omega_n \frac{d\theta_o}{dt} + \omega_n^2\theta_o = b\omega_n^2\theta_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2}}$$

Ésta es la forma general que adopta la relación entrada-salida en el dominio de s para un sistema de segundo orden.

Respuestas de segundo orden

LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN

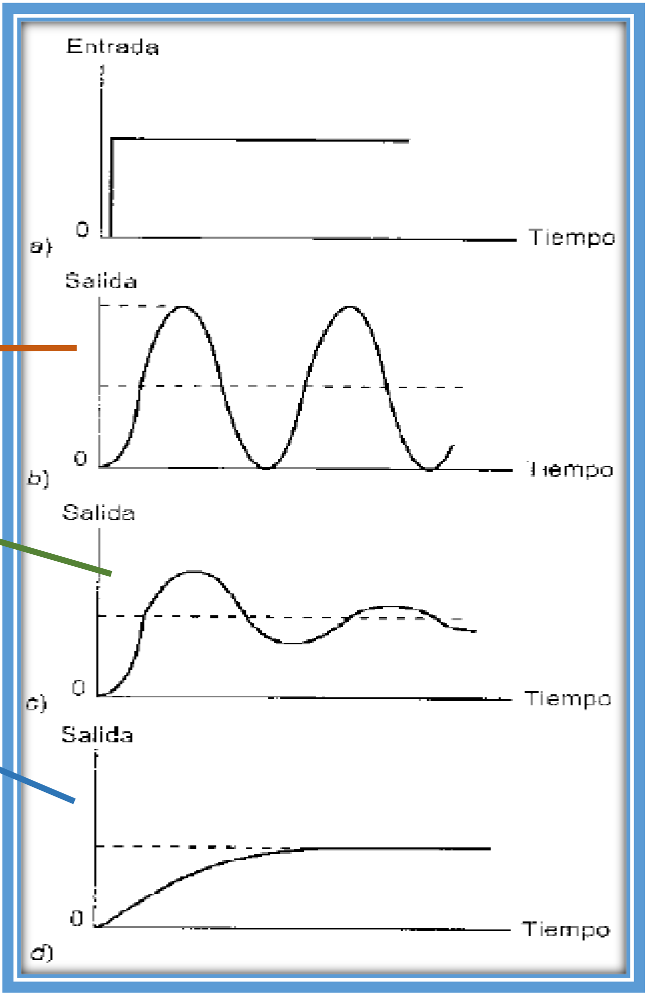
La ecuación diferencial de segundo orden general normalmente se escribe como:

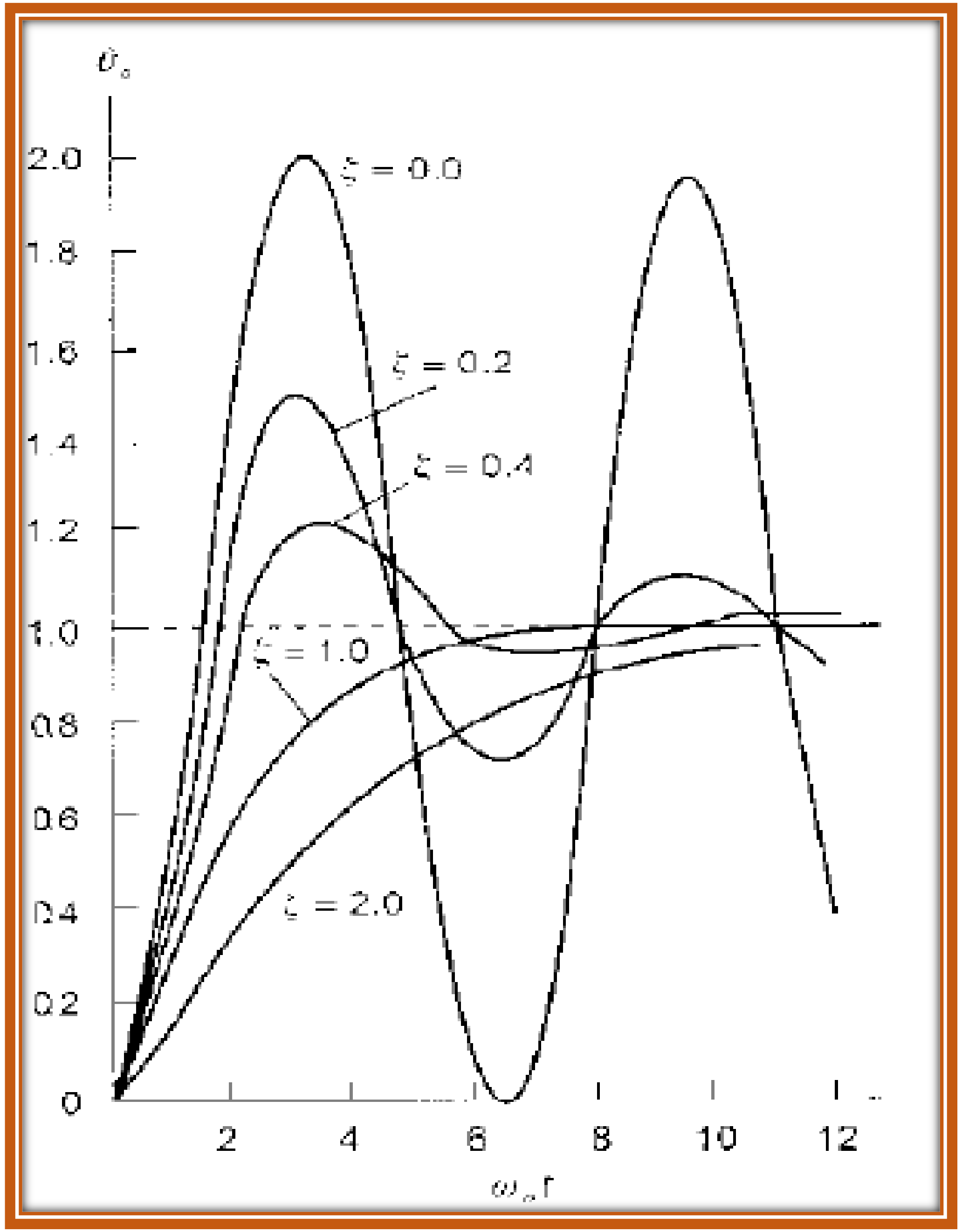
$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\varepsilon\omega_n\frac{d\theta_o}{dt} + \omega_n^2\theta_o = b_0\omega_n^2\theta_i$$

ω_n: es la frecuencia angular con la cual el sistema oscilará libre en ausencia de cualquier tipo de amortiguamiento.

ε: es el factor de amortiguamiento relativo.

- Cuando $\varepsilon = 0$, se tiene oscilaciones libres.
- Cuando $\varepsilon < 1$, amortiguamiento causará oscilaciones que desaparecerán.
- Cuando $\varepsilon > 1$, amortiguamiento será lo suficientemente grande que no habrá oscilaciones.





θ_o
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
$\zeta = 0.0$
$\zeta = 0.2$
$\zeta = 0.4$
$\zeta = 1.0$
$\zeta = 2.0$
2
4
6
8
10
12
$\omega_n t$

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN

Los valores de s que se obtienen a partir de la ecuación anterior dependen en gran medida de $\varepsilon^2 - 1$.

De esta manera, cuando $\varepsilon^2 > 1$, la raíz cuadrada es positiva.

De esta manera, cuando $\varepsilon^2 < 1$, la raíz cuadrada es negativa.

El factor de amortiguamiento relativo es crucial, ya que determina si el número al que se extrae raíz cuadrada es positivo o negativo y, por lo tanto, la forma que tendrá la salida del sistema.

- Cuando $\varepsilon > 1$, entonces hay 2 raíces reales diferentes s_1 y s_2:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= -\varepsilon\omega_n + \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} \\ s_2 &= -\varepsilon\omega_n - \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} \end{aligned}\right\} \text{ y así la solución general para } u \text{ es: } \quad u = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

Respuesta Transitoria para sistema sobre-amortiguado

- Cuando $\varepsilon = 1$, entonces hay 2 raíces reales iguales $s_1 = s_2 = -\omega_n$:

$$s_1 = s_2 = -\omega_n \quad \text{y así la solución general para } u \text{ es: } \quad u = (At + B)e^{-\omega_n t}$$

Respuesta Transitoria para sistema críticamente amortiguado

Podría parecer que la solución en este caso sería $u = Ae^{st}$, pero tal solución, con una sola constante A, no satisface las condiciones iniciales para un sistema de segundo orden.

Respuestas de segundo orden

RESPUESTA ESCALÓN DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

$$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2}\theta_i(s)$$

para una entrada escalón unitario, tenemos:

$$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2} * \frac{1}{s}$$

Esta ecuación se puede reordenar como:

$$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{(s - m_1)(s - m_2)s} \qquad (1)$$

Donde m_1 como m_2 son las raíces de la ecuación: $s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2$

$$\begin{cases} m_1 = -\varepsilon\omega_n + \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} & (2) \\ m_2 = -\varepsilon\omega_n - \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} & (3) \end{cases}$$

El tipo de respuesta que se presenta (es decir, la transformada inversa), depende del factor de amortiguamiento relativo ε:

- Cuando $\varepsilon > 1$, entonces hay 2 raíces reales diferentes y el sistema es sobre-amortiguado. Utilizando las fracciones parciales, la ecuación (1) se puede reordenar como:

$$\theta_o(s) = \frac{1}{s} + \frac{A}{s - m_1} + \frac{B}{s - m_2} \qquad (4)$$

con: $(s - m_1)(s - m_2) + As(s - m_2) + Bs(s - m_1) = b\omega_n^2$

Cuando $s = m_1$:

$$A = \frac{b\omega_n^2}{m_1(m_1 - m_2)} \qquad (5)$$

Al sustituir (2) y (3) en (5) se obtiene:

$$A = \frac{b\omega_n^2}{\left(-\varepsilon\omega_n + \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\right) * \left(2\omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\right)}$$

Respuestas de segundo orden

Luego, simplificando la ecuación queda: $A = \dfrac{b}{\left(-\varepsilon + \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\right) * \left(2\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\right)}$

Al multiplicar y dividir por $\left[-\varepsilon - \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\right]$ queda: $A = \dfrac{b\left[-\varepsilon - \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\right]}{2\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}}$ $\Rightarrow$ $A = -\dfrac{b\varepsilon}{2\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}} - \dfrac{b}{2}$

Cuando $\boldsymbol{s = m_2}$: $B = \dfrac{b\omega_n^2}{m_2(m_2 - m_1)}$ (6)

Al sustituir (2) y (3) en (6) y hacer el mismo procedimiento se obtiene: $B = \dfrac{b\varepsilon}{2\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}} - \dfrac{b}{2}$

Luego, la transformada inversa de: $\theta_o(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{A}{s - m_1} + \dfrac{B}{s - m_2}$ es: $\theta_o = 1 + Ae^{(m_1 t)} + Be^{(m_2 t)}$

Al sustituir los valores de A, B, m_1 y m_2 antes obtenidos:

$$\boxed{\theta_o = 1 + \left[-\frac{b\varepsilon}{2\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}} - \frac{b}{2}\right] e^{\left[-\varepsilon\omega_n + \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\right]t} + \left[\frac{b\varepsilon}{2\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}} - \frac{b}{2}\right] e^{\left[-\varepsilon\omega_n - \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\right]t}}$$

Respuestas de segundo orden

- Cuando $\varepsilon = 1$, se dice que el sistema está críticamente amortiguado. Para esta condición, $m_1 = m_2 = -\varepsilon\omega_n$. Entonces:

$$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}\theta_i(s)$$

para una entrada <u>escalón unitario</u>, tenemos:

$$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} * \frac{1}{s}$$

La respuesta del sistema es la transformada inversa de esta última ecuación y según las tablas:

$$\boxed{\theta_o = b * \left[1 - e^{(-\omega_n t)} - \omega_n t e^{(-\omega_n t)}\right]}$$

- Cuando $\varepsilon < 1$ las raíces son complejas y se dice que el sistema es sub-amortiguado.

Donde m_1 como m_2 son las raíces de la ecuación: $s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2$

$$\begin{cases} m_1 = -\varepsilon\omega_n + j\omega_n\sqrt{(1-\varepsilon^2)} & (7) \\ m_2 = -\varepsilon\omega_n - j\omega_n\sqrt{(1-\varepsilon^2)} & (8) \end{cases}$$

La respuesta del sistema es la transformada inversa de la siguiente ecuación:

$$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2}\theta_i(s)$$

para una entrada <u>escalón unitario</u>, tenemos:

$$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2} * \frac{1}{s}$$

Según las tablas, la transformada inversa es:

$$\boxed{\theta_o = b * \left[1 - \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}} * e^{(-\varepsilon\omega_n t)} * sen\left[\omega_n\sqrt{(1-\varepsilon^2)}t + \varphi\right]\right]}$$

De esta manera, la salida NO oscila con la frecuencia ω_n sino que la misma es amortiguada por la presencia de ε.

Respuestas de segundo orden

RESPUESTA RAMPA DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

$$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2}\theta_i(s)$$ para una entrada rampa unitaria, tenemos: $$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2} * \frac{1}{s^2}$$

Esta ecuación se puede reordenar como: $$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{(s-m_1)(s-m_2)s^2} \qquad (9)$$

Donde m_1 como m_2 son las raíces de la ecuación: $s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2$

$$\begin{cases} m_1 = -\varepsilon\omega_n + \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} & (2) \\ m_2 = -\varepsilon\omega_n - \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} & (3) \end{cases}$$

El tipo de respuesta que se presenta (es decir, la transformada inversa), depende del factor de amortiguamiento relativo ε:

Utilizando las fracciones parciales, la ecuación (9) se puede reordenar como:

$$\theta_o(s) = b\left(\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-m_1} + \frac{D}{s-m_2}\right) \qquad (10)$$

Repitiendo todo el mismo procedimiento que se vio en la respuesta para una entrada escalón unitario, se obtienen los valores de A, B, C y D:

$$A = 1 \qquad B = -\frac{2\varepsilon}{\omega_n} \qquad C = \frac{\varepsilon}{\omega_n} + \frac{2\varepsilon^2 - 1}{2\omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}} \qquad D = \frac{\varepsilon}{\omega_n} - \frac{2\varepsilon^2 - 1}{2\omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}}$$

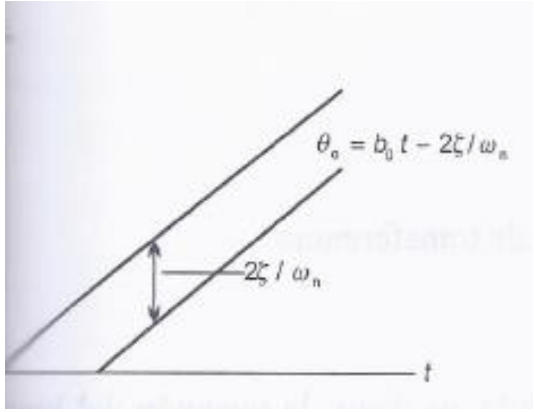
Respuestas de segundo orden

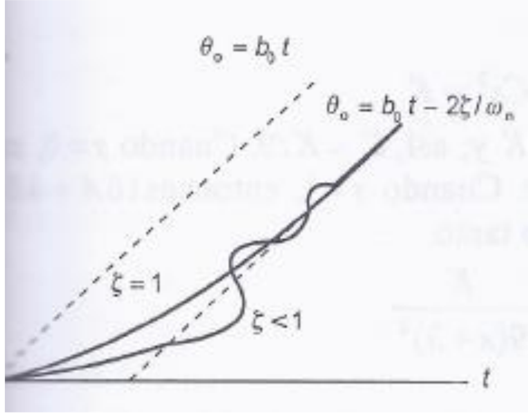
Luego, la transformada inversa de: $\theta_o(s) = b\left(\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s - m_1} + \frac{D}{s - m_2}\right)$ es: $\theta_o = b\left[At + B + Ce^{(m_1 t)} + De^{(m_2 t)}\right]$

Al sustituir los valores de A, B, C, D, m_1 y m_2 antes obtenidos:

$$\boxed{\theta_o = b\left\{t + \left(-\frac{2\varepsilon}{\omega_n}\right) + \underbrace{\left[\frac{\varepsilon}{\omega_n} + \frac{2\varepsilon^2 - 1}{2\omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}}\right]}_{C} e^{\left[-\varepsilon\omega_n + \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2-1)}\right]t} + \underbrace{\left[\frac{\varepsilon}{\omega_n} - \frac{2\varepsilon^2 - 1}{2\omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}}\right]}_{D} e^{\left[-\varepsilon\omega_n - \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2-1)}\right]t}\right\}}$$

Los términos C y D en la ecuación dan la respuesta transitoria. La forma de esta respuesta depende, ya sea que ε sea mayor, igual o menos que 1 y así, en consecuencia las raíces serán reales y diferentes, reales e iguales o complejas y diferentes.





Respuestas de segundo orden

RESPUESTA IMPULSO DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

$$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2}\theta_i(s)$$ para una entrada impulso unitario, tenemos: $$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2} * 1$$

Esta ecuación se puede reordenar como: $$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{(s-m_1)(s-m_2)} \qquad (11)$$

Donde m_1 como m_2 son las raíces de la ecuación: $s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2$

$$\begin{cases} m_1 = -\varepsilon\omega_n + \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} & (2) \\ m_2 = -\varepsilon\omega_n - \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} & (3) \end{cases}$$

El tipo de respuesta que se presenta (es decir, la transformada inversa), depende del factor de amortiguamiento relativo ε:

Utilizando las fracciones parciales, la ecuación (9) se puede reordenar como:

$$\theta_o(s) = b\left(\frac{A}{s-m_1} + \frac{B}{s-m_2}\right) \qquad (11)$$

Repitiendo todo el mismo procedimiento que se vio en la respuesta para una entrada escalón unitario, se obtienen los valores de A y B:

$$A = \frac{b\omega_n^2}{2\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}} \qquad B = -\frac{b\omega_n^2}{2\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}}$$

Respuestas de segundo orden

Luego, la transformada inversa de: $\theta_o(s) = b\left(\frac{A}{s-m_1} + \frac{B}{s-m_2}\right)$ es: $\theta_o = Ae^{(m_1 t)} + Be^{(m_2 t)}$

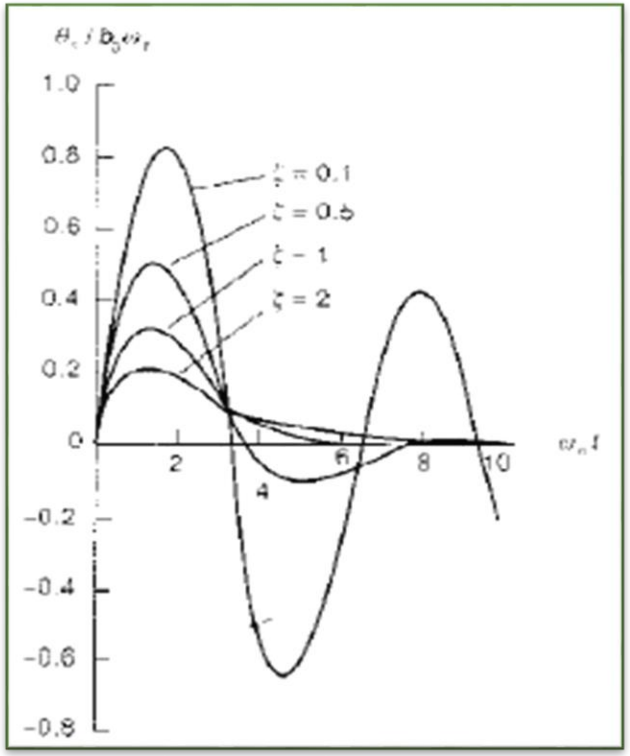
Al sustituir los valores de A, B, m_1 y m_2 antes obtenidos:

$$\boxed{\theta_o = \left[\frac{b\omega_n^2}{2\sqrt{(\varepsilon^2-1)}}\right] * \left\{e^{\left[-\varepsilon\omega_n + \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2-1)}\right]t} - e^{\left[-\varepsilon\omega_n - \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2-1)}\right]t}\right\}}$$

La forma de la respuesta que se presenta dependerá de si las raíces m_1 y m_2, son reales o complejas.

- Cuando $\varepsilon > 1$ las raíces son reales diferentes y el resultado es sólo un incremento de la salida seguido de un lento decaimiento hacia el valor cero.
- Cuando $\varepsilon = 1$ las raíces son reales e iguales y el sistema está críticamente amortiguado. Esto significa que continúa el incremento inicial en la salida y la respuesta regresa a cero en un tiempo mínimo sin oscilaciones.
- Cuando $\varepsilon < 1$ las raíces son complejas y se tiene un incremento inicial en las oscilaciones de salida, con un decaimiento uniforme en la amplitud hasta que eventualmente regresa al valor cero. Para este caso la ecuación suele escribirse como:

$$\boxed{\theta_o = \left[\frac{b\omega_n^2}{2\sqrt{(\varepsilon^2-1)}}\right] * e^{(-\varepsilon\omega_n t)} * sen\left[\omega_n\sqrt{(1-\varepsilon^2)}t\right]}$$



Respuestas de segundo orden

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN

- Cuando $\varepsilon < 1$, entonces hay 2 raíces complejas:

$$s = -\varepsilon\omega_n \pm \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} = -\varepsilon\omega_n \pm \omega_n\sqrt{(-1)(1-\varepsilon^2)} \Rightarrow s = -\varepsilon\omega_n \pm j\underbrace{\boxed{\omega_n\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}}_{\omega}$$

Luego: $s = -\varepsilon\omega_n \pm j\omega \quad \begin{cases} s_1 = -\varepsilon\omega_n + j\omega \\ s_2 = -\varepsilon\omega_n - j\omega \end{cases}$

ω es la **frecuencia angular del movimiento cuando está en la condición amortiguada especificada por ε**. La solución en estas condiciones es:

$$u = Ae^{(-\varepsilon\omega_n + j\omega)t} + Be^{(-\varepsilon\omega_n - j\omega)t} = e^{-\varepsilon\omega_n t}\left[Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t}\right]$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - jsen(\omega t)$$

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + jsen(\omega t)$$

Por lo tanto:

$$u = e^{-\varepsilon\omega_n t}[Acos(\omega t) + jAsen(\omega t) + Bcos(\omega t) - jBsen(\omega t)] = e^{-\varepsilon\omega_n t}[(A+B)cos(\omega t) + j(A-B)sen(\omega t)]$$

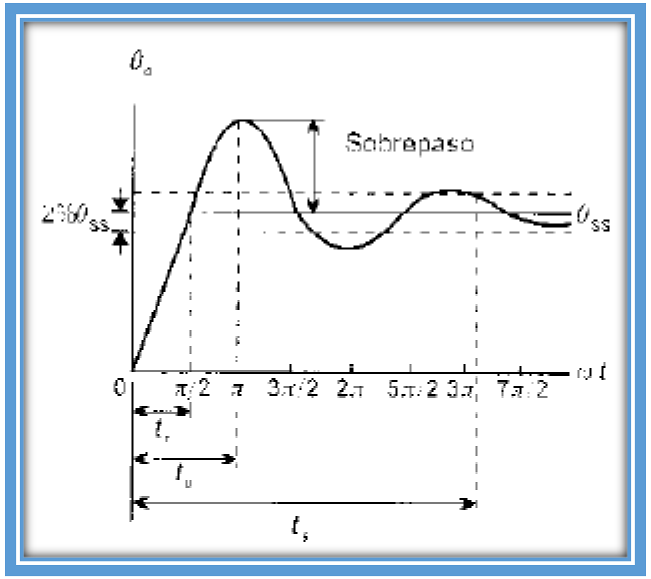
Si se sustituyen las constantes P y Q para $(A+B)$ y $j(A-B)$, entonces:

$$u = e^{-\varepsilon\omega_n t}[Pcos(\omega t) + Qsen(\omega t)]$$

Respuesta Transitoria para sistema sub-amortiguado

Respuestas de segundo orden

MEDIDAS DE DESEMPEÑO PARA SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN



La figura ilustra la forma típica de la respuesta de un sistema sub-amortiguado a una entrada escalón. Se emplean algunos términos para especificar tal desempeño:

- El ***tiempo de levantamiento*** t_r es el tiempo que toma a la respuesta θ_o levantarse desde 0 hasta el valor en estado estable θ_{ss}, y es la medida de qué tan rápido el sistema responde a una entrada. Éste es el tiempo para que la respuesta oscilatoria complete $\frac{1}{4}$ de ciclo; es decir, $\frac{\pi}{2}$:

$$\omega t_r = \frac{\pi}{2}$$

- El ***tiempo pico*** t_p es el tiempo que toma a la respuesta θ_o levantarse desde 0 hasta el primer valor pico. Éste es el tiempo para que la respuesta oscilatoria complete $\frac{1}{2}$ de ciclo; es decir, π:

$$\omega t_p = \pi$$

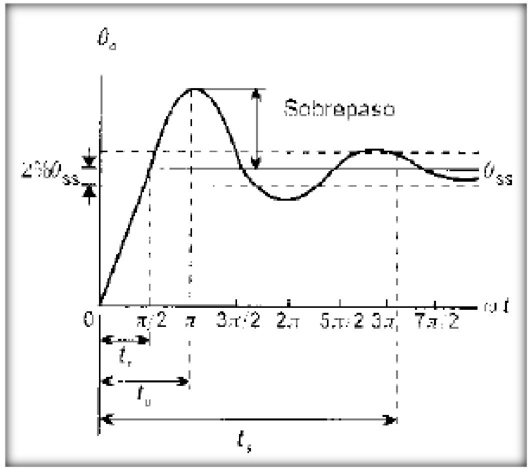
- El ***sobrepaso*** es la máxima cantidad que adquiere la respuesta por encima del valor en estado estable. Ésta es, así, la amplitud del primer pico. Con frecuencia, el sobrepaso se escribe como un porcentaje del valor en estado estable:

$$Sobrepaso = \theta_{ss} e^{\left[\frac{-\varepsilon\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}\right]} \longrightarrow Sobrepaso = \theta_{ss} e^{\left[\frac{-\varepsilon\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}\right]} * 100\%$$

Respuestas de segundo orden

MEDIDAS DE DESEMPEÑO PARA SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Una indicación de qué tan rápido decaen las oscilaciones la proporciona la ***razón de asentamiento o decremento***. Es decir, la amplitud del segundo sobrepaso dividida entre la amplitud del primer sobrepaso. El primer sobrepaso se presenta cuando $\omega t = \pi$; el segundo sobrepaso, cuando $\omega t = 2\pi$. (tener en cuenta que aquí estamos tomando como segundo sobrepaso cuando llega a su máximo por debajo del valor estacionario)



$$Primer\ sobrepaso = \theta_{ss} e^{\left[\frac{-\varepsilon\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}\right]} \qquad Segundo\ sobrepaso = \theta_{ss} e^{\left[\frac{-2\varepsilon\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}\right]}$$

Luego, la razón de asentamiento es:

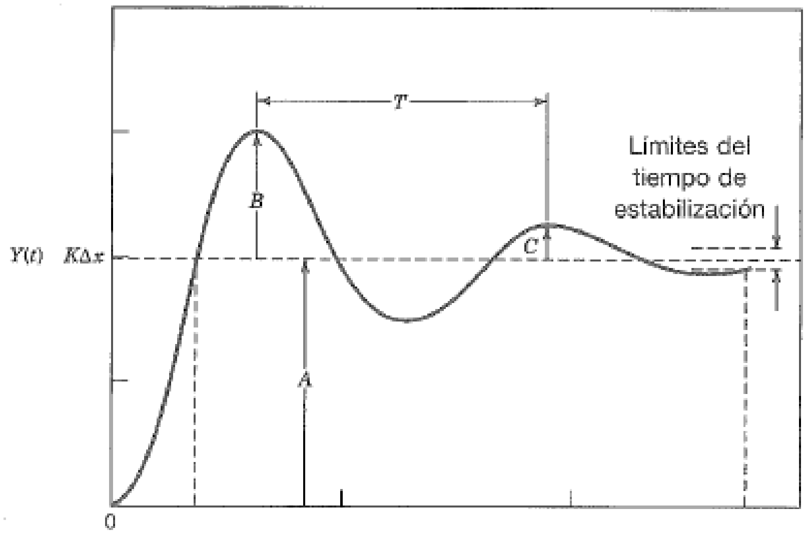
$$Razón\ de\ asentamiento = \frac{Segundo\ sobrepaso}{Primer\ sobrepaso}$$

$$Razón\ de\ asentamiento = \frac{\theta_{ss} e^{\left[\frac{-2\varepsilon\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}\right]}}{\theta_{ss} e^{\left[\frac{-\varepsilon\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}\right]}} \Rightarrow Razón\ de\ asentamiento = e^{\left[\frac{-\varepsilon\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}\right]}$$

- El ***tiempo de asentamiento*** t_s se emplea como una medida del tiempo que toman las oscilaciones en desaparecer. Éste es el tiempo que le toma a la respuesta decaer y mantenerse dentro de un porcentaje especificado (por ejemplo: 2%), alrededor del valor en estado estable. Esto significa que la amplitud debe ser menor al 2% de θ_{ss}.

La siguiente ecuación indica cómo varía la respuesta θ_o con el tiempo: $\theta_o = e^{(-\varepsilon\omega_n t)} * [\theta_{ss}\cos(\omega t) + Q sen(\omega t)] + \theta_{ss}$

Respuestas de segundo orden



$$\text{Periodo} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{(1 - \zeta^2)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\psi} = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Razón de asentamiento. La razón de asentamiento (*decay ratio*) es la razón a la cual la amplitud de la onda sinusoidal se reduce durante un ciclo completo. Se define como el cociente de dos picos consecutivos en la misma dirección. C/B en la figura 2-5.2:

$$\text{Razón de asentamiento} = e^{-(\zeta/\tau)T} = e^{-2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

(tener en cuenta en esta ecuación que se define la razón de asentamiento entre 2 picos sucesivos máximos por encima del valor estacionario)

MEDIDAS DE DESEMPEÑO PARA SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

La amplitud de la oscilación es $(\theta_o - \theta_{ss})$, y de este modo: $Amplitud = e^{(-\varepsilon\omega_n t)} * [\theta_{ss}\cos(\omega t) + Qsen(\omega t)]$

Los valores máximos de la amplitud se presentan cuando ωt es un múltiplo de π y así $\cos(\omega t) = 1$ y $\text{sen}(\omega t) = 0$. El tiempo de asentamiento t_s, es cuando la amplitud máxima es el 2% de θ_{ss}. Entonces:

$$0{,}02\theta_{ss} = e^{(-\varepsilon\omega_n t_s)}\theta_{ss} \Rightarrow 0{,}02 = e^{(-\varepsilon\omega_n t_s)} \Rightarrow \underbrace{\ln(0{,}02)}_{3{,}9\approx 4} = -\varepsilon\omega_n t_s$$

De esta manera:

$$t_s = \frac{4}{\varepsilon\omega_n} \quad \text{para un 2\% de amplitud máxima.}$$

$$t_s = \frac{3}{\varepsilon\omega_n} \quad \text{para un 5\% de amplitud máxima.}$$

Puesto que: $Periodo = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ en un tiempo asentamiento t_s el número de oscilaciones que se presentan es:

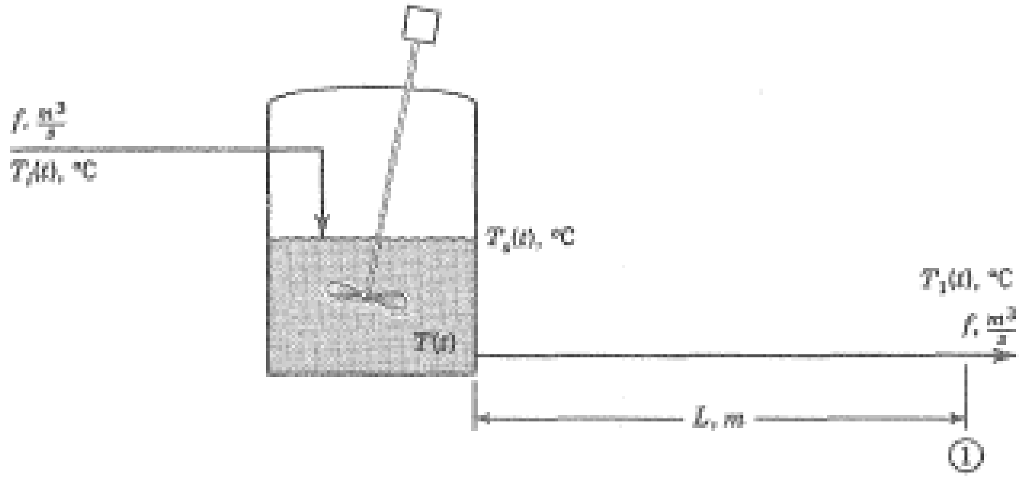
$$Número\ de\ oscilaciones = \frac{tiempo\ de\ asentamiento}{periodo} = \frac{\frac{4}{\varepsilon\omega_n}}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{2\omega}{\pi\varepsilon\omega_n}$$

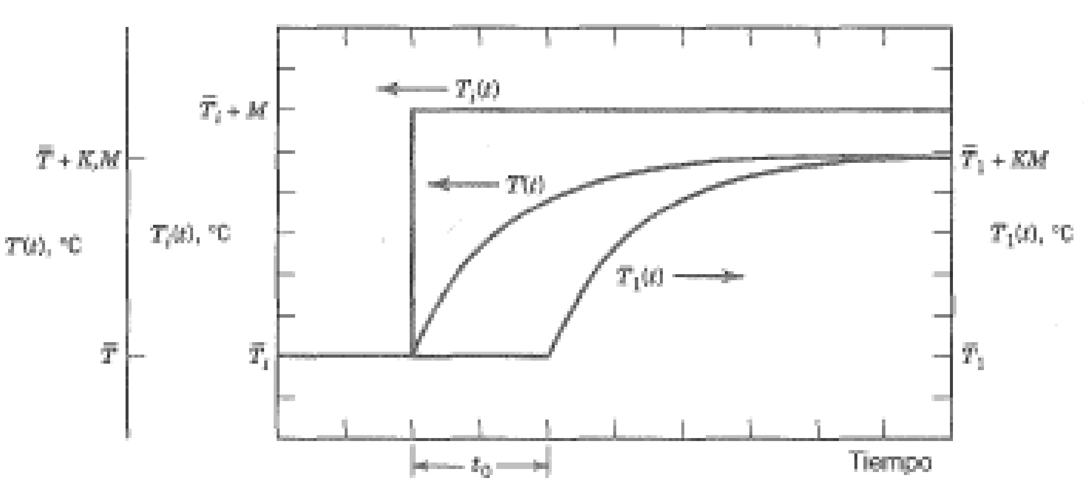
Puesto que: $\omega = \omega_n\sqrt{(1-\varepsilon^2)}$

$$Número\ de\ oscilaciones = \frac{2\omega_n\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}{\pi\varepsilon\omega_n} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)}$$

- TIEMPO MUERTO

Considérese el proceso que se muestra en la figura. Se trata, en esencia, de un proceso de primer orden con un retraso de transporte hasta el punto 1.





to = tiempo muerto puro

$$t_o = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{L}{f/A_p} = \frac{A_p L}{f}$$

f = flujo volumétrico, m^3/s
A_p = área transversal del conducto, m^2
L = longitud del conducto, m.

Modelos de Tiempo muerto

- TIEMPO MUERTO ***to = tiempo muerto puro***

Debido a que el tiempo muerto es parte integral de los procesos, es necesario tomarlo en cuenta en las funciones de transferencia.

La transformada de Laplace de una función de retardo es igual al producto de la transformada de Laplace de la función sin retardo y el término e^{-to*s}

El término $\boldsymbol{e^{-to*s}}$ es la transformada de Laplace del tiempo muerto.

Generalizando las funciones de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + 1)e^{-t_o s}}{(b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + 1)}$$