ÁLGEBRA (LCC)

UNIDAD 1 - FUNDAMENTOS

Licenciatura en Ciencias de la Computación
FING - UNCuyo

Conceptos

1. Rudimentos de Lógica Matemática
   - a. Proposiciones & Conectivos Lógicos I
   - b. Equivalencias Lógicas & Conectivos Lógicos II
   - c. Cuantificador Universal & Cuantificador Existencial
2. Combinatoria y el Principio de Inducción Matemática: una introducción
   - a. Número Combinatorio y El Teorema del Binomio
   - b. El Principio de Inducción

Conceptos

1. Rudimentos de Lógica Matemática
   a. Proposiciones & Conectivos Lógicos I
   b. Equivalencias Lógicas & Conectivos Lógicos II
   c. Cuantificador Universal & Cuantificador Existencial
2. Combinatoria y el Principio de Inducción Matemática: una introducción

Conceptos

1. Rudimentos de Lógica Matemática
   a. Proposiciones & Conectivos Lógicos I
   b. Equivalencias Lógicas & Conectivos Lógicos II
   c. Cuantificador Universal & Cuantificador Existencial
2. Combinatoria y el Principio de Inducción Matemática: una introducción

Conceptos

1. Rudimentos de Lógica Matemática
   a. Proposiciones & Conectivos Lógicos I
   b. Equivalencias Lógicas & Conectivos Lógicos II
   c. Cuantificador Universal & Cuantificador Existencial
2. Combinatoria y el Principio de Inducción Matemática: una introducción

Conceptos

1. Rudimentos de Lógica Matemática
   - a. Proposiciones & Conectivos Lógicos I
   - b. Equivalencias Lógicas & Conectivos Lógicos II
   - c. Cuantificador Universal & Cuantificador Existencial
2. Combinatoria y el Principio de Inducción Matemática: una introducción

Conceptos

1. Rudimentos de Lógica Matemática
2. Combinatoria y el Principio de Inducción Matemática: una introducción
   a. Número Combinatorio y El Teorema del Binomio
   b. El Principio de Inducción

La matemática es la reina de las ciencias y la teoría de números es la reina de las matemáticas.

Johann Carl Friedrich Gauss.

La matemática es la reina de las ciencias y la teoría de números es la reina de las matemáticas.

Johann Carl Friedrich Gauss.

La matemática es la reina de las ciencias y la teoría de números es la reina de las matemáticas.

Johann Carl Friedrich Gauss.

$$1+2+3+\cdots+98+99+100$$

La matemática es la reina de las ciencias y la teoría de números es la reina de las matemáticas.

Johann Carl Friedrich Gauss.

$$1+2+3+\cdots+98+99+100$$

Figura: Johann Carl Friedrich Gauss $1777-1855$.

Conceptos

1. Rudimentos de Lógica Matemática
2. Combinatoria y el Principio de Inducción Matemática: una introducción
   a. Número Combinatorio y El Teorema del Binomio
   b. El Principio de Inducción

Conceptos

1. Rudimentos de Lógica Matemática
2. Combinatoria y el Principio de Inducción Matemática: una introducción
   a. Número Combinatorio y El Teorema del Binomio
   b. El Principio de Inducción

Si quisieramos sumar, en poco tiempo,

$$1+2+3+\ ...+98+99+100$$

¿Cómo haríamos?

Y si quisieramos una fórmula para la suma

$$1+2+3+...+(n\text{-}2)+(n\text{-}1)+n$$

¿Podríamos hacer lo mismo que con la otra suma?

¿Cómo podemos probar de una forma, más rigurosa, que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

?

Necesitamos un método para probar esto.

¿Es siempre un número primo

$$n^2 + n + 41,$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$?

$$
\begin{array}{lrl}
n = 1 & 1^2 + 1 + 41 = 1 + 1 + 41 = 41 & \checkmark \\
n = 2 & 2^2 + 2 + 41 = 4 + 2 + 41 = 47 & \checkmark \\
n = 3 & 3^2 + 3 + 41 = 9 + 3 + 41 = 53 & \checkmark \\
n = 4 & 4^2 + 4 + 41 = 16 + 4 + 41 = 61 & \checkmark \\
n = 5 & 5^2 + 5 + 41 = 25 + 5 + 41 = 71 & \checkmark \\
n = 6 & 6^2 + 6 + 41 = 36 + 6 + 41 = 83 & \checkmark \\
n = 7 & 7^2 + 7 + 41 = 49 + 7 + 41 = 107 & \checkmark \\
n = 8 & 8^2 + 8 + 41 = 64 + 8 + 41 = 113 & \checkmark \\
n = 9 & 9^2 + 9 + 41 = 81 + 9 + 41 = 131 & \checkmark \\
n = 10 & 10^2 + 10 + 41 = 100 + 10 + 41 = 151 & \checkmark
\end{array}
$$

y podríamos continuar así, ¿por siempre?

¡NO!

Si $n = 41$

$$41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot (41 + 1 + 1) = 41 \cdot 43,$$

que es **compuesto** y por lo tanto no es **primo**.

¿Es siempre un número compuesto

$$12\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ términos.}}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$?

$n = 0$	$12 = 3 \cdot 4$	$\checkmark$
$n = 1$	$121 = 11 \cdot 11$	$\checkmark$
$n = 2$	$1211 = 7 \cdot 173$	$\checkmark$
$n = 3$	$12111 = 33 \cdot 367$	$\checkmark$
$n = 4$	$121111 = 281 \cdot 431$	$\checkmark$
$n = 5$	$1211111 = 253 \cdot 4787$	$\checkmark$

y podríamos continuar así **mucho tiempo**, ¿por siempre?

¡NO!

Si $n = 136$

$121111111111111111111111111111111$
$1111111111\ 1111111111\ 1111111111$
$1111111111\ 1111111111\ 1111111111$
$1111111111\ 1111111111\ 1111111111$
$1111111111\ 111111,\quad$ ✗

que es **primo** y por lo tanto no es **compuesto**.

NECESITAMOS UN MÉTODO QUE SIEMPRE FUNCIONE

Supongamos que queremos calcular la suma de los impares en un cierto rango

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$$

Ejemplo (Sumatoria Python 3)

```
def ejemplo (n):
  s=0
  for i in range (1 ,n +1):
        s=s +(2*i -1)
  return s
```

Ejemplo (Print Sumatoria Python 3)

```
for n in range (1 ,10):
  print ("n=",n," ejemplo (n)=",ejemplo (n))
```

EJEMPLO (SUMATORIA PYTHON 3)

```python
def ejemplo (n):
  s=0
  for i in range (1 ,n +1):
        s=s +(2*i -1)
  return s
```

EJEMPLO (SALIDA SUMATORIA PYTHON 3)

```
n= 1 ejemplo(n)= 1
n= 2 ejemplo(n)= 4
n= 3 ejemplo(n)= 9
n= 4 ejemplo(n)= 16
n= 5 ejemplo(n)= 25
n= 6 ejemplo(n)= 36
n= 7 ejemplo(n)= 49
n= 8 ejemplo(n)= 64
n= 9 ejemplo(n)= 81
```

¿Podemos deducir algo de estos datos?

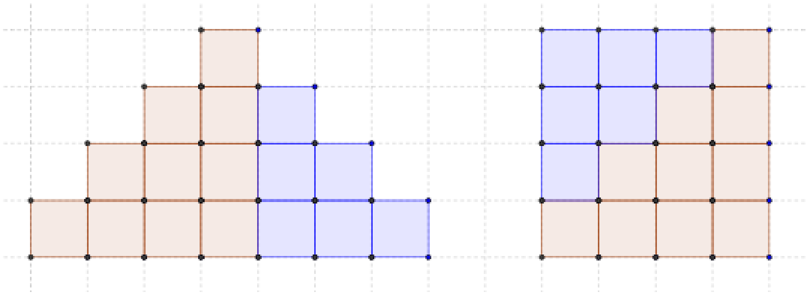

Figura: $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 = 16.$

¿Cómo podemos probar, **sin gráficos**, que

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \text{ ?}$$

Necesitamos el siguiente método para probar:

El Principio de Inducción

Sea $P(n)$ una función proposicional, con $n = 1, 2, \ldots$. Si

1. $P(1)$ es verdadera, y
2. $P(k) \to P(k+1)$, para todo $k = 1, 2, \ldots$,

entonces $P(n)$ es verdad para todo $n = 1, 2, \ldots$.

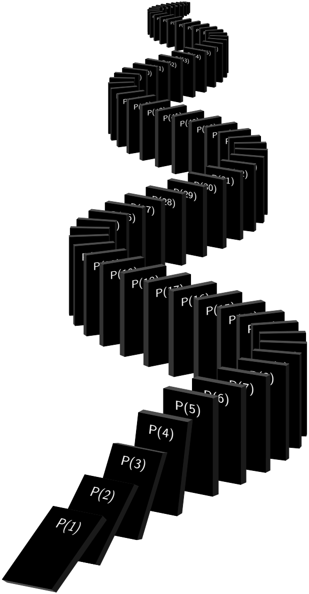

Figura: El Principio de Inducción.

EJEMPLO

Probar por inducción que

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Solución

- ¿$P(1)$ VERDADERO? ✓

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

- ¿$P(2)$ VERDADERO? ✓

$$1 + 2 = 3$$

y

$$\frac{2 \cdot (2+1)}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

EJEMPLO

- ¿$P(3)$ VERDADERO? ✓
$$1+2+3=6$$
y
$$\frac{3\cdot(3+1)}{2}=\frac{3\cdot 4}{2}=3\cdot 2=6$$
- Asumamos por, **hipótesis inductiva (HI)**, que $P(k)$ es VERDADERO. Es decir,
$$P(k):1+2+3+\ldots+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2},$$
es VERDADERO.

EJEMPLO

- Debemos probar que $P(k+1)$ es VERDADERO. Es decir, **queremos probar que (QPQ)**

$$P(k+1): 1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)\cdot[(k+1)+1]}{2},$$

es VERDADERO. **Observación** aún no lo probamos, solo escribimos lo que queremos probar.

EJEMPLO

- Calculando el lado izquierdo (**LI**)

$$\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+k+(k+1) &= [1+2+3+\ldots+k]+(k+1) \\
&= \frac{k\cdot(k+1)}{2}+(k+1) && \text{por } (\mathbf{HI}) \\
&= \frac{k\cdot(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2} && \text{operando} \\
&= \frac{k\cdot(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k^2+k+2k+2}{2} \\
&= \frac{k^2+3k+2}{2}
\end{aligned}$$

EJEMPLO

- Calculando el lado derecho (**LD**)

$$\frac{(k+1)\cdot[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2} \quad \text{operando}$$
$$= \frac{k^2+2k+k+2}{2}$$
$$= \frac{k^2+3k+2}{2}$$

Como el (**LI**) es el mismo que el (**LD**) concluimos que:

$$P(k+1): 1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)\cdot[(k+1)+1]}{2},$$

es VERDADERO.

EJEMPLO

- En conclusión:

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2},$$

es VERDADERO, para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$.

EJERCICIO

Probar por inducción que

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$