Álgebra (LCC)

Unidad 1 - Fundamentos

Licenciatura en Ciencias de la Computación
FING - UNCuyo

Conceptos

Conceptos

Conceptos

Conceptos

1. Rudimentos de Lógica Matemática
   - a. Proposiciones & Conectivos Lógicos I
   - b. Equivalencias Lógicas & Conectivos Lógicos II
   - c. Cuantificador Universal & Cuantificador Existencial
2. Combinatoria y el Principio de Inducción Matemática: una introducción
3. Números complejos

Conceptos

Conceptos

1. Rudimentos de Lógica Matemática
2. Combinatoria y el Principio de Inducción Matemática: una introducción
   a. Número Combinatorio y El Teorema del Binomio
   b. El Principio de Inducción
3. Números complejos

Conceptos

Conceptos

1. Rudimentos de Lógica Matemática
2. Combinatoria y el Principio de Inducción Matemática: una introducción
   - a. Número Combinatorio y El Teorema del Binomio
   - b. El Principio de Inducción
3. Números complejos

Conceptos

¿Existe un número real x tal que:

$$\mathsf{x}^2 = -1?$$

¡NO!

Ya que

$$\mathsf{x}^2 \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vamos a necesitar otro *tipo* de números.

Conceptos

DEFINICIÓN (Cuerpo de los Complejos)

El *cuerpo** de los *números complejos* se define como el conjunto de pares ordenados

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 = \{z = (x, y) := x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

donde i es la unidad imaginaria que tiene la siguiente propiedad

$$i^2 = -1.$$

Además dotamos a $\mathbb{C}$ con las operaciones de adición y multiplicación definidas por:

$$\begin{aligned} z + w &= (x + u) + (y + v)i \\ z \cdot w &= (xu - yu) + (xv + yu)i \end{aligned}$$

donde $z = x + iy$ y $w = u + iv$.

¿De donde viene esa definición de multiplicación tan extraña?

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (x + iy) \cdot (u + iv) \\ &= xu + ixv + iyu + i^2 yu \\ &= xu + i(xv + yu) - 1yu \\ &= (xu - yu) + i(xv + yu) \end{aligned}$$

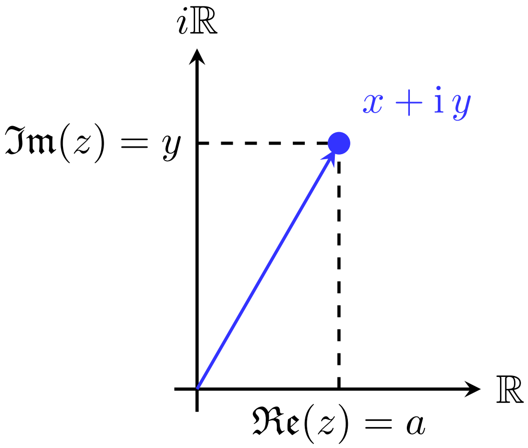

Figura: Plano de Argand o Plano de Gauss

DEFINICIÓN (Parte Real & Parte Imaginaria)

Sea $z = x + iy$. Definimos la *parte real* de z, denotada por $\mathfrak{Re}(z)$, por

$$\mathfrak{Re}(z) = x,$$

De forma análoga, la *parte imaginaria* de z, denotada por $\mathfrak{Im}(z)$, por

$$\mathfrak{Im}(z) = y.$$

EJEMPLO (Parte Real & Parte Imaginaria)

Sea $z = 3 + 2i$ e $w = -5i$. Calcular las partes reales e imaginarias de cada número.

Solución

$$\mathfrak{Re}(z) = 3; \quad \mathfrak{Re}(w) = 0, \quad \mathfrak{Im}(z) = 2, \quad \mathfrak{Im}(w) = -5.$$

OBSERVACIÓN

- $z = x + iy$ se denomina forma binómica de z.
- Podemos escribir un número complejo como

$$z = x + iy = x + yi$$

  Es decir, la unidad imaginaria i puede escribirse tanto antes como después (pués veremos que la propiedad conmutativa se satisface).
- Sumar o múltiplicar números complejos es *similar* a la suma o multiplicación de polinomios.

EJEMPLO (Suma y Producto)

Sean $z = 2 - 3i$ y $w = 5 + 4i$. Calcular

1. $z + w$;
2. $z \cdot w$.

Solución

1.

$$\begin{aligned} z + w &= (2 - 3i) + (5 + 4i) \\ &= (2 + 5) + (-3 + 4)i \\ &= 7 - 1i \\ &= 7 - i; \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (2 - 3i) \cdot (5 + 4i) \\ &= 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4i - 3i \cdot 5 - 3i \cdot 4i \\ &= 10 + 8i - 15i - 12i^2 \\ &= 10 - 7i + 12 = 22 - 7i \\ &= (2 - 3i) + (5 + 4i). \end{aligned}$$

PROPIEDAD (Potencias de la Unidad Imaginaria i)

Para todo $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tenemos que

$$i^n = i^{4k+r} = \begin{cases} 1, & \text{cuando } r = 0 \\ i, & \text{cuando } r = 1 \\ -1, & \text{cuando } r = 2 \\ -i, & \text{cuando } r = 3 \end{cases}$$

donde $n = 4k + r$ con $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ y $r = 0, 1, 2, 3$ (restos de la división por 4).

EJEMPLO (Conjugado)

Calcular i^{2086} e i^{-97}.

Solución Como $2086 = 4 \cdot 521 + 2$ y $-97 = 4 \cdot (-25) + 3$, entonces:

$$i^{2086} = i^2 = -1,$$

y

$$i^{-97} = \frac{1}{i^{97}} = \frac{1}{i^1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i.$$

Definición (Conjugado)

Sea $z = x + iy$. El conjugado de z, denotado por $\overline{z}$, se define como

$$\overline{z} = x - iy.$$

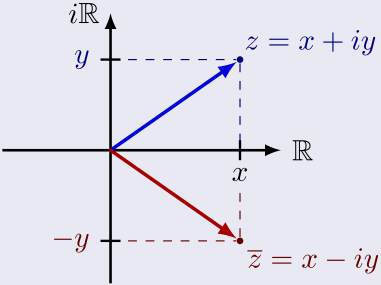

Figura: Complejos conjugados.

Ejemplo (Conjugado)

Sean $z = 2 - 3i$ y $w = 5 + 4i$. Calcular sus conjugados respectivamente.

Solución

$$\overline{z} = 2 + 3i \text{ y } \overline{w} = 5 - 4i.$$

Definición (Módulo)

Sea $z = x + iy$. El módulo de z, denotado por $|z|$, se define como

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Propiedad (Módulo)

Sea $z = x + iy$. Entonces

1. $|z| \geqslant 0$;
2. $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.

EJEMPLO (Módulo)

Sea $w = 5 + 4i$. Calcular el cuadrado de su módulo.

Solución

$$|w|^2 = |5 + 4i|^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41.$$

EJEMPLO (División)

Sean $z = 2 - 3i$ y $w = 5 + 4i$. Calcular $\dfrac{z}{w}$

Solución

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{z}{w} \cdot 1 = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2},$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= \frac{(2-3i) \cdot \overline{5+4i}}{|5+4i|^2} = \frac{(2-3i) \cdot (5-4i)}{5^2+4^2} \\
&= \frac{2 \cdot 5 - 2 \cdot 4i - 3 \cdot 5i + 3i \cdot 4i}{41} = \frac{10 - 8i - 15i + 12i^2}{41} \\
&= \frac{10 - 23i - 12}{41} = \frac{-2-23i}{41} \\
&= -\frac{2}{41} - \frac{23}{41} i.
\end{aligned}$$

PROPIEDADES (CUERPO DE LOS COMPLEJOS)

El *cuerpo** de los complejos satisface las siguientes propiedades:

1. $z + w = w + z$;
2. $(z + w) + u = z + (w + u)$;
3. $z + 0 = z = 0 + z$;
4. $z + (-z) = 0 = (-z) + z$;
5. $z \cdot w = w \cdot z$;
6. $(z \cdot w) \cdot u = z \cdot (w \cdot u)$;
7. $z \cdot 1 = z = 1 \cdot z$;
8. $z \cdot z^{-1} = 1 = z^{-1} \cdot z$, con $z \neq 0$;

donde

- z, w y u son números complejos cualesquiera;
- $0 = 0 + 0i$ y $1 = 1 + 0i$;
- $-z$ es el opuesto aditivo de z;
- $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ es el inverso multiplicativo de z (con $z \neq 0$).

Conceptos

DEFINICIÓN (Argumento de z)

Sea $z = x + iy \neq 0$. El *argumento* de z (a veces llamado de*fase*) es el ángulo que forma el segmento Oz con el eje real positivo, y se escribe como $\arg(z)$, **expresado en radianes**. El argumento de z es *multivaluado*.

Definición (Argumento Principal de z)

Sea $z = x + iy \neq 0$. El *argumento principal* de z, y denotado por $\text{Arg}(z)$, es el argumento de z que satisface

$$-\pi < \text{Arg}(z) \leqslant \pi.$$

EJEMPLO (Argumento de z)

Buscar el argumento y el argumento principal de $z = 1 - i$.

Solución

$$\begin{aligned} \arg(z) &= \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{Arg}(z) &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

DEFINICIÓN (Forma Polar)

Sea $z = x + iy \neq 0$. La forma polar de z es

$$z = r\left[\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right];$$

donde $r := |z|$ y θ es el argumento de z.

DEFINICIÓN (Forma Exponencial)

La forma exponencial de z es

$$z = re^{i(\theta)},$$

donde $r := |z|$ y θ es el argumento de z.

PROPIEDAD (Múltiplicación en Forma Polar)c)

Sean $z_1 = r_1\left[\cos(\theta_1) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1)\right]$ y $z_2 = r_2\left[\cos(\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_2)\right]$ dos números complejos en forma polar, entonces

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\right].$$

PROPIEDAD (Múltiplicación en Forma Exponencial))

Sean $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ dos números complejos en forma exponencial, entonces

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

PROPIEDAD (Multiplicación - Geometría))

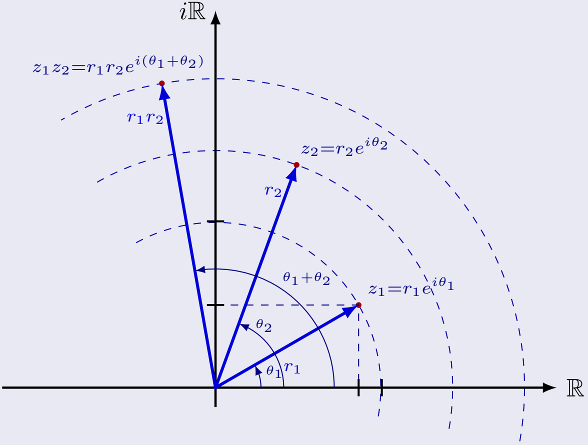

Figura: Producto de dos números complejos.

EJEMPLO (Múltiplicación en Forma Polar)

Sean $z = 5\,[\cos(\pi/4) + i\,\operatorname{sen}(\pi/4)]$ y $w = 2\,[\cos(\pi/3) + i\,\operatorname{sen}(\pi/3)]$.
Calcular $z \cdot w$.

Solución

$$z \cdot w = 10\,[\cos(7\pi/12) + i\,\operatorname{sen}(7\pi/12)]$$

EJEMPLO (División en Forma Exponencial)

Sean $z = 5e^{i\pi/4}$ y $w = 2e^{i\pi/3}$. Calcular $z \cdot w$.

Solución

$$z \cdot w = 10e^{7i\pi/12}.$$

PROPIEDAD (División en Forma Polar))

Sean $z_1 = r_1\,[\cos(\theta_1) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1)]$ y $z_2 = r_2\,[\cos(\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_2)]$ dos números complejos en forma polar, entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)]\,.$$

PROPIEDAD (División en Forma Exponencial))

Sean $z_1 = r_1\,e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2\,e^{i\theta_2}$ dos números complejos en forma exponencial, entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

EJEMPLO (División en Forma Polar)

Sean $z = 55\,[\cos(\pi/4) + i\,\mathrm{sen}(\pi/4)]$ y $w = 2\,[\cos(\pi/3) + i\,\mathrm{sen}(\pi/3)]$. Calcular z/w.

Solución

$$\frac{z}{w} = \frac{5}{2}\left[\cos(-\pi/12) + i\,\mathrm{sen}(-\pi/12)\right] = \frac{5}{2}\left[\cos(\pi/12) - i\,\mathrm{sen}(\pi/12)\right].$$

EJEMPLO (División en Forma Exponencial)

Sean $z = 5e^{i\pi/4}$ y $w = 2e^{i\pi/3}$. Calcular z/w.

Solución

$$\frac{z}{w} = \frac{5}{2}e^{-i\pi/12}.$$

Conceptos

TEOREMA (Fórmula de Moivre)

Sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$[\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta),$$

o en forma exponecial:

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

TEOREMA (Raíces n-ésimas de z - Forma Polar)

Sea $z = r\,[\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)]$ y sea n un entero positivo. Entonces

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = w \longleftrightarrow z = w^n,$$

tiene n soluciones y son de la forma

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right],$$

con $k = 0, \ldots, n-1$.

TEOREMA (RAÍCES n-ÉSIMAS DE z - FORMA EXPONENCIAL)

Sea $z = re^{i\theta}$ y sea n un entero positivo. Entonces

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = w \longleftrightarrow z = w^n,$$

tiene n soluciones y son de la forma

$$w_k = r^{1/n}\ e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = r^{1/n} \exp\left[i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right],$$

con $k = 0, \ldots, n-1$.

EJEMPLO (Raíces)

Calcular las 5 raíces de

$$z = 1 - \mathrm{i} \; = \; \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = re^{i\theta}$$

. Además graficarlas en el *plano de Argand*.

Solución Sabemos que $r = \sqrt{2} = 2^{1/2}$ y $\theta = -\pi/4$. Por el resultado del teorema anterior tenemos que qie calcular

$$r^{1/5} = \left(2^{1/2}\right)^{1/5} = 2^{1/10},$$

y

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{-(\pi/4) + 2k\pi}{20} = \frac{\dfrac{-\pi + 4 \cdot 2k\pi}{4}}{5} = \frac{(8k-1)\pi}{20} = (8k-1) \cdot 9^{\circ}$$

con $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

EJEMPLO (Raíces)

Entonces, podemos armar las 5 raíces

$$w_k = 2^{1/10} \exp\left[i\left(\frac{(8k-1)\pi}{20}\right)\right],$$

con $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Es decir,

$$w_0 = 2^{1/10} e^{-i\dfrac{\pi}{20}} \qquad \theta_0 = -9^\circ$$

$$w_1 = 2^{1/10} e^{i\dfrac{pi}{20}} \qquad \theta_1 = -63^\circ$$

$$w_2 = 2^{1/10} e^{i\dfrac{3\pi}{4}} \qquad \theta_2 = 135^\circ$$

$$w_3 = 2^{1/10} e^{i\dfrac{23\pi}{20}} \qquad \theta_3 = 207^\circ$$

$$w_4 = 2^{1/10} e^{i\dfrac{31\pi}{20}} \qquad \theta_4 = 279^\circ$$

EJEMPLO (RAÍCES)

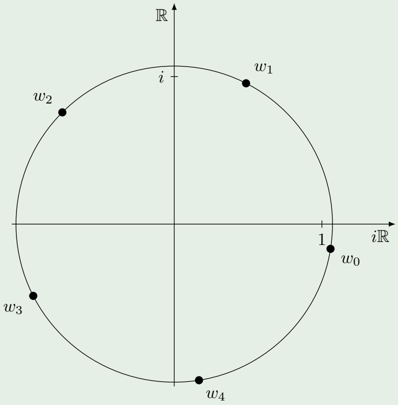

Figura: Las 5 raíces de $z = 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

¿Qué podemos predecir del último gráfico?

TEOREMA (Raíces n-ésimas de z - Geometría)

Sea n entero positivo, con $n \geqslant 3$. Las n raíces de un número complejo (no nulo) son los vértices de un polígono regular de n lados con centro en el origen ($z = 0$) del plano de Argand. En consecuencia, dos raíces consecutivas forman un ángulo de $360°/n$.