ÁLGEBRA (LCC)

UNIDAD 2 - SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Licenciatura en Ciencias de la Computación
FING - UNCuyo

Conceptos

DEFINICIÓN (ECUACIÓN)

Una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

es una ecuación lineal en las n-variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes.

Las variables en una ecuación lineal, algunas veces se denominan incógnitas.

EJEMPLOS

- $3x + 2y = 7$ ✓
- $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$ ✓
- $3xy + \cos y = 7$ ✗
- $e^x - 2z = 7$ ✗
- $sen(\frac{\pi}{2})x_1 - 4x_2 + 10x_3 - e^2x_4 = 4$ ✓

DEFINICIÓN (ECUACIÓN)

Una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

es una ecuación lineal en las n-variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes.

Las variables en una ecuación lineal, algunas veces se denominan incógnitas.

EJEMPLOS

- $3x + 2y = 7$ ✓
- $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$ ✓
- $3xy + \cos y = 7$ X
- $e^x - 2z = 7$ X
- $sen(\frac{\pi}{2})x_1 - 4x_2 + 10x_3 - e^2x_4 = 4$ ✓

Definición (Ecuación)

Una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

es una ecuación lineal en las n-variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes.
Las variables en una ecuación lineal, algunas veces se denominan incógnitas.

Ejemplos

- $3x + 2y = 7$ ✓
- $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$ ✓
- $3xy + \cos y = 7$ ✗
- $e^x - 2z = 7$ ✗
- $sen(\frac{\pi}{2})x_1 - 4x_2 + 10x_3 - e^2x_4 = 4$ ✓

DEFINICIÓN (ECUACIÓN)

Una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

es una ecuación lineal en las n-variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes.
Las variables en una ecuación lineal, algunas veces se denominan incógnitas.

EJEMPLOS

- $3x + 2y = 7$ ✓
- $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$ ✓
- $3xy + \cos y = 7$ X
- $e^x - 2z = 7$ X
- $sen(\frac{\pi}{2})x_1 - 4x_2 + 10x_3 - e^2x_4 = 4$ ✓

DEFINICIÓN (ECUACIÓN)

Una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

es una ecuación lineal en las n-variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes.
Las variables en una ecuación lineal, algunas veces se denominan incógnitas.

EJEMPLOS

- $3x + 2y = 7$ ✓
- $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$ ✓
- $3xy + \cos y = 7$ X
- $e^x - 2z = 7$ X
- $sen(\frac{\pi}{2})x_1 - 4x_2 + 10x_3 - e^2x_4 = 4$ ✓

DEFINICIÓN (ECUACIÓN)

Una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

es una ecuación lineal en las n-variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes.
Las variables en una ecuación lineal, algunas veces se denominan incógnitas.

EJEMPLOS

- $3x + 2y = 7$ ✓
- $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$ ✓
- $3xy + \cos y = 7$ X
- $e^x - 2z = 7$ X
- $sen(\frac{\pi}{2})x_1 - 4x_2 + 10x_3 - e^2x_4 = 4$ ✓

DEFINICIÓN (Ecuación)

Una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

es una ecuación lineal en las n-variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes.
Las variables en una ecuación lineal, algunas veces se denominan incógnitas.

EJEMPLOS

- $3x + 2y = 7$ ✓
- $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$ ✓
- $3xy + \cos y = 7$ **X**
- $e^x - 2z = 7$ X
- $sen(\frac{\pi}{2})x_1 - 4x_2 + 10x_3 - e^2x_4 = 4$ ✓

DEFINICIÓN (ECUACIÓN)

Una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

es una ecuación lineal en las n-variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes.

Las variables en una ecuación lineal, algunas veces se denominan incógnitas.

EJEMPLOS

- $3x + 2y = 7$ ✓
- $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$ ✓
- $3xy + \cos y = 7$ ✗
- $e^x - 2z = 7$ ✗
- $sen(\frac{\pi}{2})x_1 - 4x_2 + 10x_3 - e^2x_4 = 4$ ✓

DEFINICIÓN (Ecuación)

Una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

es una ecuación lineal en las n-variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes.
Las variables en una ecuación lineal, algunas veces se denominan incógnitas.

EJEMPLOS

- $3x + 2y = 7$ ✓
- $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$ ✓
- $3xy + \cos y = 7$ ✗
- $e^x - 2z = 7$ ✗
- $sen(\frac{\pi}{2})x_1 - 4x_2 + 10x_3 - e^2x_4 = 4$ ✓

DEFINICIÓN (ECUACIÓN)

Una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

es una ecuación lineal en las n-variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes.
Las variables en una ecuación lineal, algunas veces se denominan incógnitas.

EJEMPLOS

- $3x + 2y = 7$ ✓
- $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$ ✓
- $3xy + \cos y = 7$ X
- $e^x - 2z = 7$ X
- $sen(\frac{\pi}{2})x_1 - 4x_2 + 10x_3 - e^2x_4 = 4$ ✓

DEFINICIÓN (ECUACIÓN)

Una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

es una ecuación lineal en las n-variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes.
Las variables en una ecuación lineal, algunas veces se denominan incógnitas.

EJEMPLOS

- $3x + 2y = 7$ ✓
- $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$ ✓
- $3xy + \cos y = 7$ X
- $e^x - 2z = 7$ X
- $sen(\frac{\pi}{2})x_1 - 4x_2 + 10x_3 - e^2x_4 = 4$ ✓

DEFINICIÓN (Solución)

Una solución de una ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ es

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

de modo que al reemplazar cada x_i por s_i se satisface la ecuación.
El conjunto de todas las soluciones de la ecuación se denomina conjunto solución o, algunas veces, solución general de la ecuación.

EJEMPLOS

Una solución de la ecuación $3x + 2y = 7$ es $s = (1, 2)$ ya que

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7$$

Mientras que $S = \left\{ \left(t, \frac{7}{2} - \frac{3}{2}t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$ es el conjunto solución de la ecuación.

DEFINICIÓN (Sistema de Ecuaciones Lineales)

Un conjunto de m ecuaciones lineales con n variables se denomina sistema de ecuaciones lineales (SEL) que escribiremos de la forma

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Las variables en una ecuación lineal, algunas veces se denominan incógnitas.

Observación: La notación con doble subíndice indica que

$$a_{ij}$$

es el coeficiente de x_j en la $i-$ésima ecuación.

DEFINICIÓN (Solución)

Una solución de un sistema de ecuaciones lineales es una sucesión de números

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

de modo que al reemplazar cada x_i por s_i se satisface cada una de las ecuaciones del sistema.
El conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales se denomina conjunto solución.

- Un SEL se denomina **consistente** si tiene por lo menos una solución e **inconsistente** si no tiene solución.
- La expresión *resolver un SEL* es equivalente a *hallar el conjunto solución* de ese SEL.

EJEMPLOS

Resuelva el siguiente SEL graficando cada recta.

$$\begin{cases} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & 1 \end{cases}$$

Solución: Despejamos en cada ecuación la variable y y obtenemos

$$y = 3 - x \quad , \quad y = x - 1$$

Graficamos.

EJEMPLOS

Resuelva el siguiente SEL graficando cada recta.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

Solución: Despejamos en cada ecuación la variable y y obtenemos que ambas rectas son de la forma.

$$y = 3 - x$$

Por lo tanto, obtenemos dos rectas coincidentes.
Graficamos.

EJEMPLOS

Resuelva el siguiente SEL graficando cada recta.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Solución: Despejamos en cada ecuación la variable y y obtenemos que ambas rectas son de la forma.

$$y = 3 - x \quad , \quad y = 1 - x$$

Obtenemos dos rectas con la misma pendiente.
Graficamos.

Cantidad de soluciones

Para un sistema de ecuaciones lineales sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

1. El SEL tiene exactamente una solución. El SEL se denomina **sistema consistente determinado**.
2. El SEL tiene un número infinito de soluciones. El SEL se denomina **sistema consistente indeterminado**.
3. El SEL no tiene solución. El SEL se denomina **sistema inconsistente**.

Resolución de un SEL

¿Cuál de los siguientes SEL es más fácil de resolver?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ -x & + & 3y & & & = & -4 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right.$$

El SEL de la derecha es el más fácil de resolver, responde a una forma de *escaleras o escalones* y permite realizar una **sustitución hacia atrás** para resolver ese SEL.

EJEMPLOS

Para resolver el SEL $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right.$

con sustitución hacia atrás, notemos que de la última ecuación sabemos que

$$z = 2$$

Al sustituir ese valor en la ecuación anterior, obtenemos

$$y + 3(2) = 5$$

De donde, $y = -1$.
Finalmente, sustituímos $y = -1$ y $z = 2$ en la primera ecuación para obtener

$$x - 2(-1) + 3(2) = 9$$

De donde, $x = 1$.
Por lo tanto, la solución del SEL es

$$\{(1, -1, 2)\}$$

- Dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.
- Para resolver un sistema que no está en forma escalonada, debemos hallar un sistema equivalente que esté en forma escalonada.
  Existen 3 *operaciones elementales* que podemos realizar a un sistema para obtener uno equivalente, en forma escalonada.
- Aplicar estas tres operaciones elementales para reescribir un SEL en forma escalonada, por lo general, genera una cadena de sistemas equivalentes. Este proceso se denomina ***eliminación gaussiana*** en honor al matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Operaciones elementales

Las operaciones elementales, que producen un sistema equivalente son:

1. Intercambiar dos ecuaciones.
2. Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Sumar a una ecuación, un múltiplo de otra ecuación.

EJEMPLO (Eliminación gaussiana)

Resolvamos el SEL

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

Aunque existen varias posibilidades de comenzar, vamos a utilizar siempre el mismo procedimiento. Trabajaremos a partir de la *esquina superior derecha*, vamos a mantener la variable x de la primera ecuación y eliminaremos las x de las restantes ecuaciones.

Sumando la primera ecuación con la segunda, obtenemos una nueva segunda ecuación.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

(continuación...)

Sumando -2 veces la primera ecuación a la tercera, obtenemos una nueva tercera ecuación .

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & - & y & - & z & = & -1 \end{array}\right.$$

Ya hemos eliminado de la primera columna todas las x, excepto la primera. Ahora, continuaremos con la segunda columna. Mantenemos la y de la segunda ecuación y eliminaremos la restante y de la ecuación restante.

Sumando la segunda ecuación con la tercera, obtenemos una nueva segunda ecuación.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

(continuación...)

Multiplicando la tercera ecuación por $\frac{1}{2}$*, obtenemos una nueva tercera ecuación.*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & z & = & 2 \end{array} \right.$$

Este SEL es el mismo que resolvimos en el ejemplo anterior, por lo que conocemos que la única solución es

$$\{(1, -1, 2)\}$$

Continuaremos con este proceso de eliminación gaussiana, introduciendo una nueva forma de escribir el SEL.
Si tenemos cuidado de mantener el orden de las variables y escribir todos los coeficientes, incluso los que son cero, entonces no parece necesario escribir las variables x_i para aplicar el proceso de escalonamiento del sistema.

EJEMPLO

El sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ -x & + & 3y & & & = & -4 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array}\right.$$

puede escribirse en forma abreviada como

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$$

Este arreglo se denomina **matriz aumentada asociada al SEL** o **matriz ampliada asociada al SEL**. Mientras que

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

es la **matriz de coeficientes asociada al SEL.**

DEFINICIÓN (Matriz)

Sean m y n números naturales. Una matriz de tamaño $m \times n$ es un arreglo rectangular de números de m filas (o renglones) y n columnas. Cada elemento a_{ij} de la matriz representa el número que se ubica en la fila i y la columna j.

EJEMPLO (matriz)

La matriz

$$\begin{pmatrix} e & \pi \\ \sqrt{2} & -7 \\ 1 & -e \end{pmatrix}$$

es una matriz de tamaño 3×2.
El elemento de la fila 2, columna 2 es

$$a_{22} = -7$$

- Las operaciones elementales que aplicamos al SEL, se pueden utilizar sobre la matriz ampliada asociada al SEL.
- Realizar una operación elemental en un renglón de una matriz ampliada, produce una nueva matriz ampliada correspondiente a un nuevo (pero equivalente) SEL

DEFINICIÓN (Matrices equivalentes)

Dos matrices son equivalentes por filas si una se puede obtener aplicando a la otra, una cantidad finita de operaciones elementales en los renglones.

OPERACIONES ELEMENTALES

Las operaciones elementales, que producen un sistema equivalente son:

1. Intercambiar dos filas.
2. Multiplicar una fila por una constante diferente de cero.
3. Sumar a una fila, un múltiplo de otra fila.

EJEMPLO (escalonamiento con operaciones elementales en filas)

Resolvamos el sistema del ejemplo anterior, escalonando la matriz ampliada asociada.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$$

Hacemos cero el elemento a_{21}, sumando la primera fila con la segunda fila: $\boldsymbol{F_2 + F_1 \rightarrow F_2}$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$$

Hacemos cero el elemento a_{31} restando dos veces la primera fila a la tercera fila: $\boldsymbol{F_3 + (-2)F_1 \rightarrow F_3}$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

continúa...

Hacemos cero el elemento a_{32} sumando la segunda fila de la tercera fila: $\boldsymbol{F_3 + F_2 \to F_3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Por último, hacemos uno el elemento a_{33} multiplicando por $\frac{1}{2}$ la tercera fila: $\boldsymbol{\frac{1}{2}F_3 \to F_3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

continúa...

Obtenemos así una matriz que se asocia con el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right.$$

Ahora puede utilizarse la sustiución hacia atrás para encontrar la solución. Este SEL es el mismo que resolvimos en el ejemplo anterior, por lo que conocemos que la única solución es

$$\{(1, -1, 2)\}$$

DEFINICIÓN (forma escalonada)

Para que una matriz esté en **forma escalonada** debe tener las siguientes propiedades:

1. Todas las filas que consta por completo de ceros, se encuentran en la parte inferior de la matriz.
2. Por cada fila que no consta completamente de ceros, el primer elemento no nulo es 1. (Este elemento recibe el nombre de *pivote o* 1 *principal*)
3. Para dos filas consecutivas no nulas, el 1 principal de la fila superior está más a la izquierda que el 1 principal de la fila inmediata inferior.

   Toda matriz que, además, cumpla con la condición

4. Toda columna con un 1 principal tiene ceros en todas las posiciones por arriba y por abajo del 1 principal.
   Se dice que es una matriz en **forma escalonada reducida.**

EJEMPLO (matriz escalonada y escalonada reducida)

Las siguientes matrices tienen forma escalonada por filas.

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las siguientes matrices tienen forma escalonada reducida.

1. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO (matriz NO escalonada)

La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

no está en forma escalonada.

Puede demostrarse que toda matriz es equivalente por filas a una matriz en forma escalonada por filas.

Si multiplicamos por $\frac{1}{2}$ la fila 2, cambiamos la matriz del ejemplo anterior en una matriz escalonada.

- Hemos visto la manera de utilizar la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás para resolver un SEL.
- Para este método algorítmico, el orden en el que realizamos las operaciones elementales es importante. Vamos a utilizar la siguiente idea:
  - Movernos de izquierda a derecha por columnas.
  - Elegir el 1 principal.
  - Cambiamos por cero todos los elementos debajo de los 1 principales.

EJEMPLOS (eliminación gaussiana)

Resolvamos los siguientes sistemas

1. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & & & = & 1 \end{array}\right.$$
2. $$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 1 \\ 8x_1 & + & 16x_2 & = & 4 \end{array}\right.$$
3. $$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 1 \\ 8x_1 & + & 16x_2 & = & 5 \end{array}\right.$$

- Hemos aplicado operaciones elementales en las filas de una matriz hasta obtener una forma escalonada por filas.
- Vamos a ver ahora un segundo método de eliminación, llamado **eliminación de Gauss-Jordan.** Debemos continuar el proceso de reducción hasta que se obtiene una forma escalonada reducida por filas.
- Veamos cómo se aplica, en un ejemplo.

EJEMPLO

Continuemos con el ejemplo, utilizando el método de Gauss-Jordan para resolver el SEL.
EL SEL original es

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ -x & + & 3y & & & = & -4 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array}\right.$$

Habíamos utilizado la eliminación gaussiana para obtener la siguiente forma escalonada por filas:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

En vez de hacer sustiución hacia atrás, vamos a aplicar operaciones elementales hasta obtener una matriz escalonada reducida, es decir, obtener ceros arriba y abajo de cada uno de los 1 principales.

continúa...

Hacemos cero el elemento a_{12} sumando dos veces la segunda fila con la primera fila: $\mathbf{2F_2 + F_1 \rightarrow F_1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hacemos cero el elemento a_{23} sumando -3 veces la tercera fila con la segunda fila: $\mathbf{-3F_3 + F_2 \rightarrow F_2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

continúa...

Por último, hacemos cero el elemento a_{13} sumando -9 veces la tercera fila con la primera fila: $\boldsymbol{-9F_3 + F_1 \to F_1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ahora, volviendo al SEL, tenemos que

$$\left\{\begin{array}{cccr} x & & & = \quad 1 \\ & y & & = \ -1 \\ & & z & = \quad 2 \end{array}\right.$$

De donde obtenemos rápidamente la solución del sistema.

DEFINICIÓN (SEL homogéneos)

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** (SELH) si todos los términos constantes son cero, es decir, si el sistema es de la forma

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Todo SELH es consistente, ya que una solución de todos estos sistemas es

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \dots,\ x_n = 0$$

Esta solución se denomina **solución trivial**.
En caso de que haya otras soluciones, se denominan **soluciones no triviales**.

TEOREMA

- Todo SELH es consistente.
- Si un SELH tiene menos ecuaciones que variables, entonces debe tener un número infinito de soluciones.

EJEMPLO

Resolvamos el siguiente SEL

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Verificar que la solución es el conjunto

$$\{(-2t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$