Análisis Matemático I
Clase 8: Reglas de derivación. Derivadas laterales.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2024

Objetivo de la clase:
se espera que el estudiante comience a familiarizarse con el concepto de derivada de una función, con sus propiedades básicas y con los procesos lógicos involucrados en demostraciones.

Demostración de Propiedad 1: si f es derivable en c, entonces es continua en c. Supongamos que f es derivable en $x = c$. Vamos a probar que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Demostración de Propiedad 1: si f es derivable en c, entonces es continua en c. Supongamos que f es derivable en $x = c$. Vamos a probar que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} f(x) &= \lim_{x \to c} (f(x) - f(c) + f(c)) \\
&= \lim_{x \to c} \left[(f(x) - f(c)). \frac{(x - c)}{(x - c)} + f(c) \right] \\
&= \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} .(x - c) + f(c) \right] \\
&= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} . \lim_{x \to c} (x - c) + \lim_{x \to c} f(c) = f'(c).0 + f(c) = f(c)
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que f' existe en c y las propiedades del producto y suma de límites. Así f es continua en $x = c$.

Reglas de derivación para composición de funciones

Teorema: regla de la cadena

Si g es derivable en c y f es derivable en $g(c)$, entonces $f \circ g$ es derivable en c y además:

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c)).g'(c).$$

Ejemplo: emplee la regla de la cadena para calcular la derivada de las funciones:

$$h(x) = (2x^2 + x - 10)^{10},$$

en cada x, y (para resolver por los alumnos en la sala)

$$g(x) = \left(\frac{x+5}{x-3}\right)^4, \quad x \neq 3.$$

Algunas derivadas

- Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces f es derivable en $(0, \infty)$ y su derivada en cualquier $x \in (0, \infty)$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad \text{(Luego analizaremos qué pasa en } x = 0\text{).}$$

Demostración. Sea $x > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} \cdot \frac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h.(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h.(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Algunas derivadas

- Si $g(x) = sen(x)$, entonces g es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es:

$$g'(x) = cos(x), \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{sen(x)cos(h) + cos(x)sen(h) - sen(x)}{h} \\
&= sen(x) \lim_{h \to 0} \frac{cos(h) - 1}{h} + cos(x) \lim_{h \to 0} \frac{sen(h)}{h} \\
&= cos(x), \qquad \text{donde se usó que } \lim_{h \to 0} \frac{cos(h) - 1}{h} = 0.
\end{aligned}$$

Algunas derivadas

En forma similar al caso anterior, se puede probar que: si $h(x) = cos(x)$, entonces h es derivable en $\mathbb{R}$ y

$$h'(x) = -sen(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Además, usando la regla del cociente para derivadas, se puede determinar que las funciones *tan*, *cotan*, *sec* y *csc* son derivables en todo su dominio. Por ejemplo (hacer uno):

$$\frac{d}{dx}(tan\, x) = sec^2(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(sec\, x) = sec(x).tan(x).$$

Derivadas laterales

Para estudiar la derivabilidad de funciones en puntos extremos del dominio o para comprobar si una función es derivable o no en un punto, se utilizan las derivadas laterales:

Derivadas laterales

Sea c un número real. La derivada por derecha de f en c se define como:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

siempre y cuando el límite exista. La derivada por izquierda de f en c se define como:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

siempre y cuando el límite exista.

Observación: f es derivable en c si y sólo si f es derivable por izquierda y por derecha en c y los límites coinciden.

Derivadas laterales

Ejemplo 1: sea $f(x) = |x|$. Entonces:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

y:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} == \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Así la función valor absoluto es derivable por izquierda y por derecha en $x = 0$, pero no es derivable en ese punto.

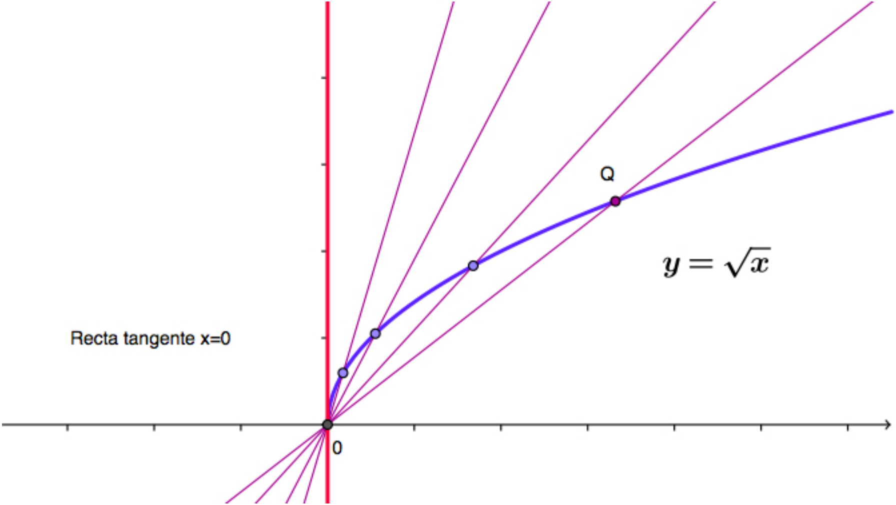
Ejemplo 2: sea $g(x) = \sqrt{x}$. Entonces:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Luego, g no es derivable por derecha en $x = 0$. Sin embargo, se puede trazar una recta que puede considerarse como recta *tangente*.

Derivadas laterales

Se observa que a medida que Q tiende al origen, las rectas secantes tienden a la recta de ecuación $x = 0$:



Ejercicio : grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

y analice, usando derivadas laterales, si f es derivable en $x = 1$.

Ejercicios de repaso para el examen (contextualizar con las definiciones de los conceptos involucrados cuando corresponda):

- Determine el dominio de $g(x) = \sqrt{x}/(\sqrt{x-4})$

Ejercicios de repaso para el examen (contextualizar con las definiciones de los conceptos involucrados cuando corresponda):

- Determine el dominio de $g(x) = \sqrt{x}/(\sqrt{x-4})$
- Dadas $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/\sqrt{x}$, determine el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$.

Ejercicios de repaso para el examen (contextualizar con las definiciones de los conceptos involucrados cuando corresponda):

- Determine el dominio de $g(x) = \sqrt{x}/(\sqrt{x-4})$
- Dadas $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/\sqrt{x}$, determine el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$.
- Encontrar todas las asíntotas de $y = (x-5)/(x^2-25)$.

Ejercicios de repaso para el examen (contextualizar con las definiciones de los conceptos involucrados cuando corresponda):

- Determine el dominio de $g(x) = \sqrt{x}/(\sqrt{x-4})$
- Dadas $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/\sqrt{x}$, determine el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$.
- Encontrar todas las asíntotas de $y = (x-5)/(x^2-25)$.
- Para la función anterior, determine las discontinuidades y clasifíquelas.

Ejercicios de repaso para el examen (contextualizar con las definiciones de los conceptos involucrados cuando corresponda):

- Determine el dominio de $g(x) = \sqrt{x}/(\sqrt{x-4})$
- Dadas $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/\sqrt{x}$, determine el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$.
- Encontrar todas las asíntotas de $y = (x-5)/(x^2-25)$.
- Para la función anterior, determine las discontinuidades y clasifíquelas.
- Determine los siguientes límites

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{8x^2-3}{2x^2+x}} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{sen(sen(t))}{sen(t)} =$$

Si hay tiempo repasar concepto de derivada, tasa de cambio, pendiente de una curva y recta tangente.