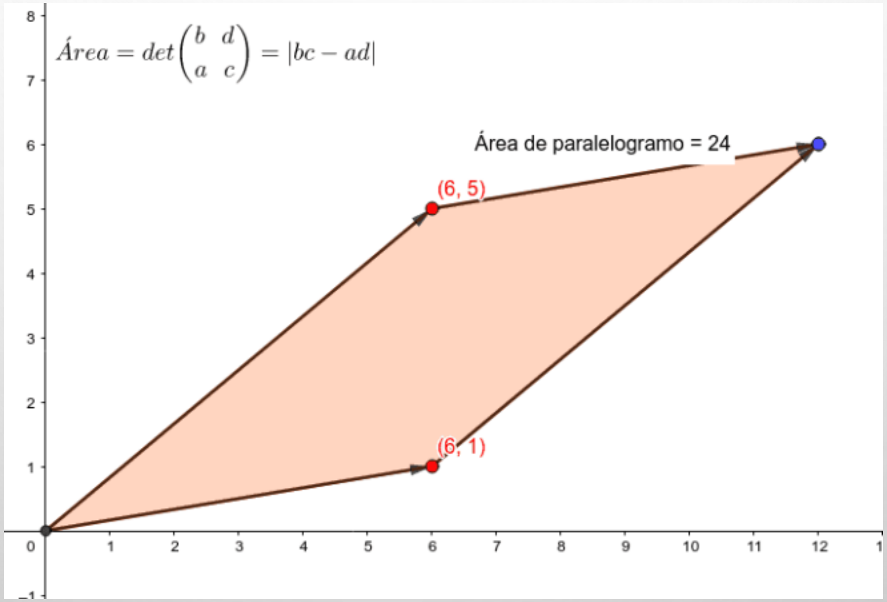
DETERMINANTES



DETERMINANTES

<u>PERMUTACIÓN DE UN CONJUNTO DE N ELEMENTOS</u>

CONSIDEREMOS UN EJEMPLO CONCRETO. SEAN 3 NÚMEROS CUALESQUIERA, {1,2,3}, SE ENTIENDE POR PERMUTACIÓN DE ESOS 3 NÚMEROS A LAS DISTINTAS FORMAS QUE TENEMOS DE ORDENAR ESE CONJUNTO. DE ESTA FORMA PODEMOS DECIR QUE ESTE CONJUNTO TIENE LAS SIGUIENTES PERMUTACIONES:

123, 132, 231, 213, 312, 321

ES DECIR UN TOTAL DE 6 PERMUTACIONES, NÚMERO QUE COINCIDE CON 3!

INVERSIÓN EN UNA PERMUTACIÓN.

UNA PERMUTACIÓN TIENE UNA INVERSIÓN CADA VEZ QUE UN VALOR MAYOR PRECEDE A UNO MENOR. POR EJEMPLO:

- LA PERMUTACIÓN 123 NO TIENE INVERSIONES,

- LA PERMUTACIÓN 132 TIENE UNA INVERSIÓN YA QUE EL 3 PRECEDE AL 2

- LA PERMUTACIÓN 312 TIENE 2 INVERSIONES YA QUE EL 3 PRECEDE AL 1 Y AL 2.

- LA PERMUTACIÓN 321 TIENE 3 INVERSIONES YA QUE EL 3 PRECEDE AL 2 Y AL1 Y EL 2 PRECEDE AL 1.

PRODUCTO ELEMENTAL DE UNA MATRIZ

DADA UNA MATRIZ CUADRADA DE ORDEN N, LLAMAMOS PRODUCTO ELEMENTAL AL PRODUCTO DE N ELEMENTOS DE LA MISMA QUE ESTÉN UBICADOS EN DISTINTAS FILAS Y COLUMNAS.

PRODUCTO ELEMENTAL CON SIGNO DE UNA MATRIZ

A cada producto elemental se le atribuye un signo de acuerdo a la cantidad de inversiones. Si esta cantidad es par se multiplica el producto elemental por (+1) y si es impar, se multiplica por (-1)

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

DADA UNA MATRIZ A DE ORDEN N, SE LLAMA DETERMINANTE DELA MATRIZ A Y SE INDICA DET(A) O IAI A LA SU SUMA DE TODOS LOS PRODUCTOS ELEMENTALES CON SIGNO DE A.

EJEMPLO:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Prod elemental	inversiones	Par o impar	Prod elemental con signo
$a_{11}a_{22}$	0 inversiones	Par	$(+1).a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	1 inversión	Impar	$(-1).a_{12}a_{21}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Prod elemental	inversiones	Par o impar	Prod elemental con signo
$a_{11}a_{22}a_{33}$	0 inversiones	Par	$(+1).a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	2 inversiones	Par	$(+1).a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	2 inversiones	Par	$(+1).a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	3 inversiones	Impar	$(-1).a_{13}a_{22}a_{31}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	1 inversión	Impar	$(-1).a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	1 inversión	Impar	$(-1).a_{11}a_{23}a_{32}$

Una matriz de orden 2x2 tiene 2 productos elementales, 1 positivo y 1 negativo.

Una matriz de orden 3x3 tiene 6 productos elementales, 3 positivos y 3 negativos.

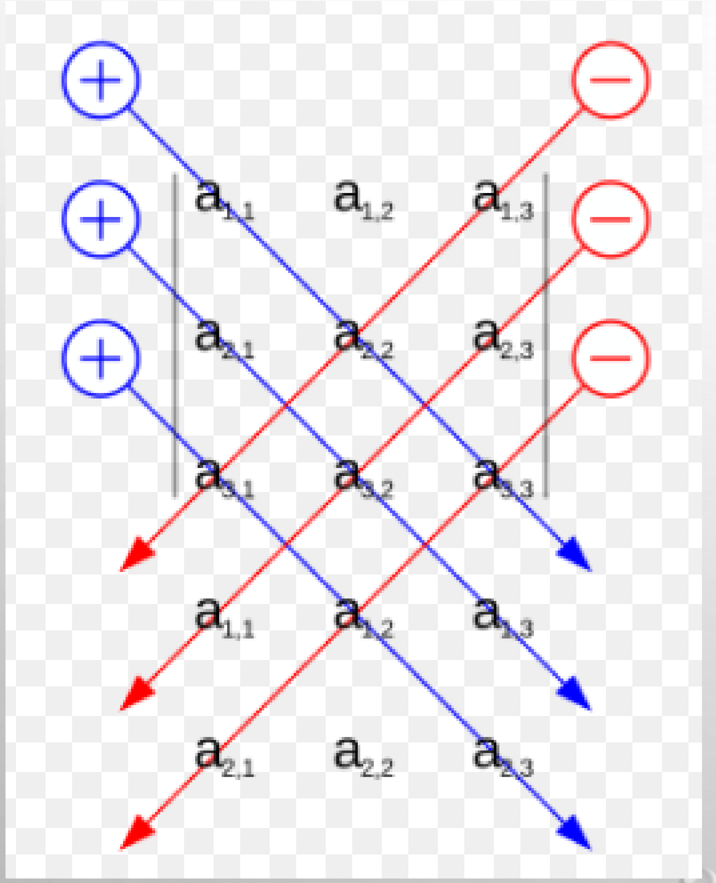
Una matriz de orden 4x4 tiene 24 productos elementales, 12 positivos y 12 negativos.

En general:

La cantidad de productos elementales de una matriz de orden n es n!, $\frac{n!}{2}$ positivos y $\frac{n!}{2}$ negativos.

CÁLCULO DE DETERMINANTES
REGLA DE SARRUS

ESTA REGLA SIRVE SOLO PARA CALCULAR DETERMINANTES DE ORDEN 3.



Los productos elementales indicados con azules se suman y los productos elementales indicados con rojo se restan. También se puede aplicar la regla agregando a la derecha de la 3° columna la primera y la segunda Columna.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1) Si un determinante tiene una fila o columna de ceros, su determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 2(0) - 6(0) = 0 - 0 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -9 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-9)(0) - 0(1) = 0 - 0 = 0$$

2)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 15 - 0 - 15 + 2 = 0$$

Si una matriz tiene dos filas iguales o dos columnas iguales, entonces es su determinante es cero.

3)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 10 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 30 + 12 - 0 - 12 - 30 = 0$$

Si una matriz tiene dos filas o dos columnas proporcionales entre sí, entonces su determinante vale cero.

4) El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}.\,a_{22}.\,a_{33}.\,\ldots.\,a_{nn}$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Sea A es una matriz de orden nxn.

- Si B es la matriz que resulta de permutar dos filas de A, entonces

$$\det(B) = -\det(A)$$

- Si B es la matriz que resulta de multiplicar una fila de la matriz A por un escalar, entonces

$$\det(B) = k\det(A)$$

- Si B es la matriz que resulta de sumarle a una fila de A un múltiplo de otra fila, entonces

$$\det(B) = \det(A)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

det(A) = -2

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A_1) = 4\det(A) = -8$

$\det(A_2) = -\det(A) = 2$

$\det(A_3) = \det(A) = -2$

8) Supongase que A, B y C son 3 matrices de orden nxn que difieren únicamente en una fila, supongamos que dicha fila es la i-ésima, de manera tal que la i-ésima fila de A es igual a la suma de las filas i-ésimas de B y C. Entonces det(A) = det(B) + det(C)

EJEMPLO

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

9) A es inversible si y solo si det(A) ≠ 0

10) El determinante de A es igual al determinante de su traspuesta.

$$\det(A) = \det(A^T)$$

11) Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, entonces

$$\det(A.B) = \det(A)\ .\ \det(B)$$

12) Si A es una matriz inversible, entonces

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

13) $\det(\alpha\ A) = \alpha^n \det(A)$

14) $\det(A^n) = [\det(A)]^n$

MENOR COMPLEMENTARIO: Dada una matriz cuadrada A, se llama menor complementario del elemento a_{ij} , y se indica M_{ij} , al determinante de la submatriz que resulta de suprimir la fila i y la columna j de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 3$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 13$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

COFACTOR DEL ELEMENTO a_{ij} : Dada una matriz A de orden nxn se llama cofactor del elemento a_{ij} y se indica C_{ij} al menor complementario del elemento a_{ij} con signo, donde el signo se obtiene elevando -1 a la suma de la fila y columna del elemento a_{ij}.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$C_{11} = M_{11} = 12$$

$$C_{12} = -M_{12} = -3$$

$$C_{13} = M_{13} = -3$$

$$C_{21} = -M_{21} = -13$$

$$C_{22} = M_{22} = 5$$

$$C_{23} = -M_{23} = 2$$

$$C_{31} = M_{31} = -7$$

$$C_{32} = -M_{32} = 2$$

$$C_{33} = M_{33} = 2$$

MÉTODO DE LOS COFACTORES O REGLA DE LAPLACE

Mediante este método, el determinante de A se puede calcular multiplicando los elementos de una fila o de una columna de A por sus respectivos cofactores y sumando los productos obtenidos.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -10 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD:

Si multiplicamos los elementos de una fila de A por los cofactores correspondientes a otra fila de A y sumamos dichos productos obtenemos como resultado cero.

MATRIZ DE LOS COFACTORES DE A

Se llama así a la matriz que tiene como elementos los cofactores de los elementos de la matriz A. Se indica Cof(A)

MATRIZ ADJUNTA DE A

Se llama así a la matriz traspuesta de la matriz de los cofactores de A.

Se indica $\text{Adj}(A) = [\text{Cof}(A)]^T$

PROPIEDAD

Sea A matriz de orden nxn.

$$A.Adj(A) = |A|.I$$

$$A.Adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots. & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots. & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}.c_{11} + a_{12}.c_{12} + \cdots + a_{1n}.c_{1n} & a_{11}.c_{21} + a_{12}.c_{22} + \cdots + a_{1n}.c_{2n} & \dots & a_{11}.c_{n1} + a_{12}.c_{n2} + \cdots + a_{1n}.c_{nn} \\ a_{21}.c_{11} + a_{22}.c_{12} + \cdots + a_{2n}.c_{1n} & a_{21}.c_{21} + a_{22}.c_{22} + \cdots + a_{2n}.c_{2n} & \dots & a_{21}.c_{n1} + a_{22}.c_{n2} + \cdots + a_{2n}.c_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}.c_{11} + a_{n2}.c_{12} + \cdots + a_{nn}.c_{1n} & a_{n1}.c_{21} + a_{n2}.c_{22} + \cdots + a_{nn}.c_{2n} & \dots & a_{n1}.c_{n1} + a_{n2}.c_{n2} + \cdots + a_{nn}.c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A.Adj(A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix}$$

$$A.Adj(A) = |A|.I$$

INVERSA DE A

Si A es inversible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} . Adj(A)$$

REGLA DE CHIO

Este método nos sirve para resolver determinantes de cualquier orden, consiste en reducir el orden del determinante en una unidad.

Esta regla consiste en elegir un elemento 1 entre los elementos de la matriz dada, si no hubiese un 1, se debe lograr el 1 mediante operaciones elementales. Una vez logrado el 1 (pivote) se anulan , mediante operaciones elementales los elementos restantes de la columna del pivote. Luego, se calcula el determinando aplicando la regla de Laplace aplicada a la columna del pivote.

Esto se puede lograr de una forma práctica de la siguiente forma: Una vez logrado el elemento igual a 1, multiplicamos $(-1)^{i+j}$, siendo i e j la fila y columna del elemento 1 respectivamente, por el determinante de orden n – 1 que se obtiene eliminando la fila y columna del elemento 1 también llamado pivote y transformando los elementos restantes mediante la regla del rectángulo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Área del paralelogramo= $\left| \det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right| = |x_1y_2 - x_2y_1|$

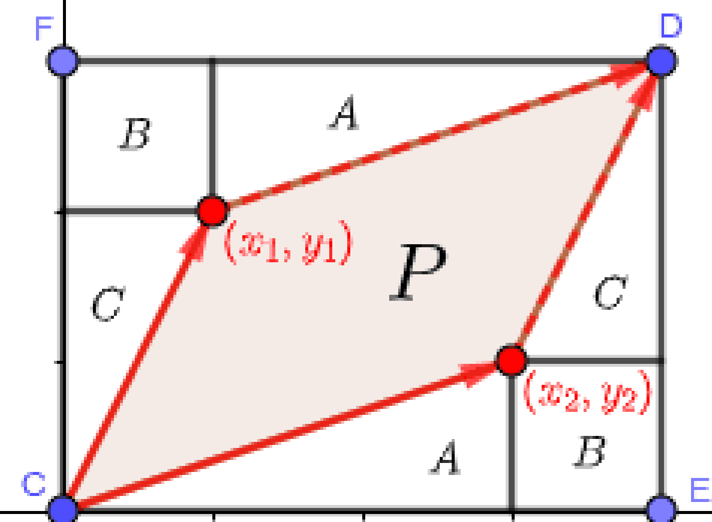
☑ Demostración

$área(CFDE)$ | $área(CFDE)$

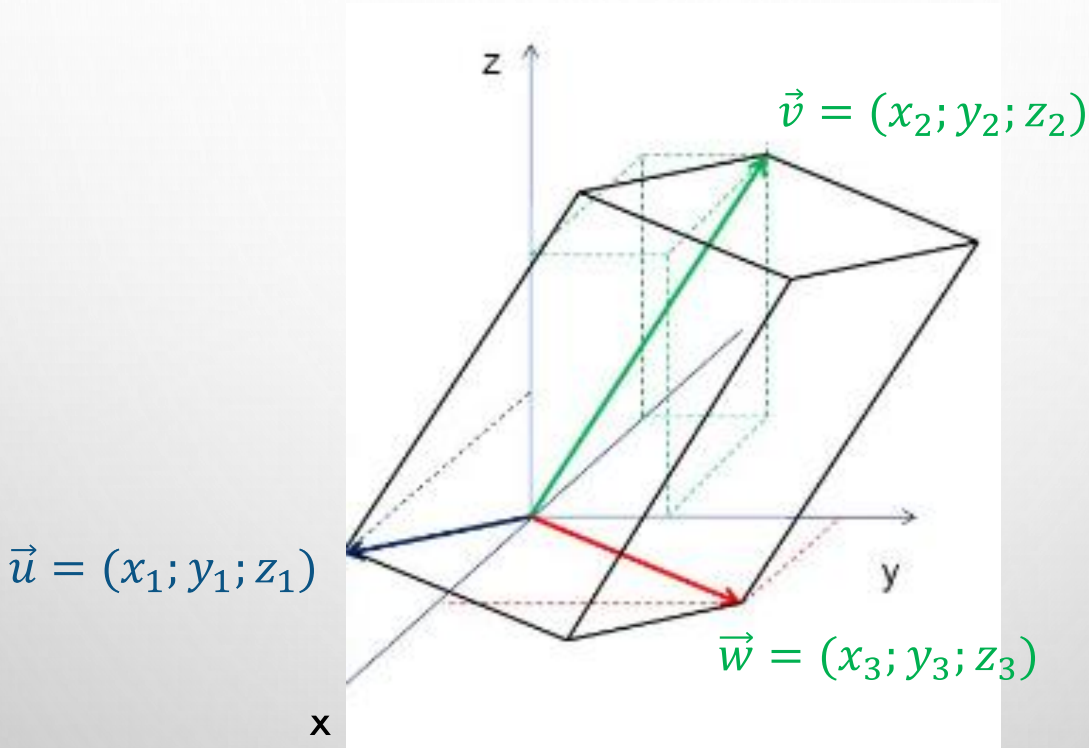
$(x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2)$ | $2A + 2B + 2C + área(P)$

$x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ | $(x_2y_2) + 2(x_1y_2) + (x_1y_1) + área(P)$

$$x_1y_2 + x_2y_1 = 2x_1y_2 + área(P)$$
$$-x_1y_2 + x_2y_1 = área(P)$$
$$|x_1y_2 - x_2y_1| = área(P)$$



- DETERMINANTE DE ORDEN 3



Volumen del paralelepípedo= $\left| det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}\right) \right|$