ÁLGEBRA (LCC)

UNIDAD 2 - ESPACIOS n-DIMENSIONALES

Licenciatura en Ciencias de la Computación
FING - UNCuyo

Conceptos

Vimos que el conjunto solución de un SEL con n incógnitas x_i es el conjunto de las sucesiones de números reales

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

de modo que al reemplazar cada incógnita x_i por s_i se satisface cada una de las ecuaciones del sistema.
Veamos la relación de esa definición con la siguiente:

DEFINICIÓN (ESPACIO N-DIMENSIONAL)

Sea n un número natural, una $n-$ada ordenada es una sucesión de n números

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

El conjunto de todas las $n-$adas ordenadas se denomina espacio $n-$dimensional y se denota por $\mathbb{R}^n$.

- Cuando $n = 1$ cada $n-$ada ordenada consta de un número real, de modo que $\mathbb{R}^1$ se considera como el conjunto de números reales.
- Cuando $n = 2$ se usa el término de **par ordenado**, que es un elemento del espacio $2-$dimensional $\mathbb{R}^2$.
- Cuando $n = 3$ se usa el término de **terna ordenada**, que es un elemento del espacio $3-$dimensional $\mathbb{R}^3$.

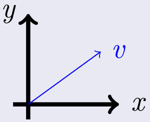
EJEMPLOS

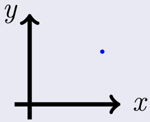
- $(4, 5, 3)$ es una terna ordenada.
- $(-2, 4, 0, 1, -3)$ es una $5-$ada ordenada.

Pretendemos realizar ciertas operaciones entre las $n-$adas, como suma, multiplicación por un escalar y además ¿graficarlas?

Espacio 2-dimensional

- El par ordenado (v_1, v_2) se representa geométricamente en el plano.





El segmento de recta dirigido cuyo punto inicial es el origen de coordenadas y cuyo punto final es el punto (v_1, v_2), recibe el nombre de **vector en el plano**.

- Operaciones:
  1. Suma:

$$u + v = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

  2. Multiplicación por un escalar:

$$cv = c(v_1, v_2) = (cv_1, cv_2)$$

EJEMPLO

$$3(-2, 5) + (3, 4) = (-3, 19)$$

El análisis de los vectores en el plano puede extenderse al análisis de vectores en el espacio $n-$dimensional.

Espacio n-dimensional

- Una $n-$ada ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ puede considerarse como un punto o vector en $\mathbb{R}^n$.
- Operaciones:
  1. Suma: $u + v =$
  $$(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$
  2. Multiplicación por un escalar:
  $$cv = c(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (cv_1, cv_2, \ldots, cv_n)$$
- Dos vectores son iguales, cuando componente a componente son iguales.

EJEMPLO

Sean $u = (2, -1, 5, 0)$, $v = (4, 3, 1, -1)$ y $w = (-6, 2, 0, 3)$ vectores en $\mathbb{R}^4$. Encontremos el valor de x tal que

$$x = 2u - (v + 3w)$$

$$\begin{aligned} x &= 2u - (v + 3w) \\ &= (4, -2, 10, 0) - (4, 3, 1, -1) - (-18, 6, 0, 9) \\ &= (18, -11, 9, -8) \end{aligned}$$

- Veremos ahora 10 propiedades especiales de la suma vectorial y de la multiplicación por un escalar.
- Cualquier conjunto que cumpla estas propiedades se denomina **espacio vectorial** y los elementos del conjunto se denominan **vectores.**
- Las propiedades de las definiciones no se demuestran, son las propiedades necesarias para que un conjunto sea un espacio vectorial.

Espacio vectorial

Sea $\mathbb{V}$ un conjunto sobre el que están definidas dos operaciones: la suma y la multiplicación por un escalar. Si los siguientes axiomas se cumplen para todo u, v y w en $\mathbb{V}$ y todo escalar c y d, entonces $\mathbb{V}$ se denomina **espacio vectorial.**

1. $u + v$ está en $\mathbb{V}$
2. $u + v = v + u$
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$
4. $\mathbb{V}$ contiene un vector 0, tal que para todo u en $\mathbb{V}$, $u + 0 = u$
5. Para todo u en $\mathbb{V}$, hay un vector $-u$ en $\mathbb{V}$, tal que, $u + (-u) = 0$
6. cu está en $\mathbb{V}$
7. $c(u + v) = cv + cu$
8. $(c + d)u = cu + du$
9. $c(du) = (cd)u$
10. $1(u) = u$

Conocemos varios ejemplos de espacios vectoriales (EV). Veamos algunos

EJEMPLOS

1. El conjunto de todos los números reales con las operaciones estándares: $\mathbb{R}$ es un EV.
2. El conjunto de todos los pares ordenados con las operaciones estándares: $\mathbb{R}^2$ es un EV.
3. El conjunto de todos las $n-$adas ordenadas con las operaciones estándares: $\mathbb{R}^n$ es un EV.
4. El conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a 2, con las operaciones estándares: P_2 es un EV.
5. El conjunto de todas las funciones continuas definidas en la toda la recta real, con las operaciones estándares: $C(-\infty, \infty)$ es un EV.

EJEMPLO QUE NO ES EV

Veamos que el conjunto de los números naturales

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

no es un EV.

Por ejemplo, no existe el vector 0 en los naturales, ni tampoco el elemento $-n$.

¿Cuáles otras propiedades no se cumplen?

Muchas aplicaciones del álgebra lineal suceden sobre EV que son subconjuntos de EV más grandes.
Por ejemplo, el conjunto solución de un SELH en n variables es un *subconjunto* de $\mathbb{R}^n$. Este subconjunto, cumple con una propiedad muy especial que es ser un **subespacio** de $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN (SUBSPACIO)

Un subconjunto no vacío $\mathbb{W}$ de un EV $\mathbb{V}$ se denomina subespacio de $\mathbb{V}$ si $\mathbb{W}$ es un EV bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar heredadas de $\mathbb{V}$.

TEOREMA

Si $\mathbb{W}$ es un subconjunto de un EV $\mathbb{V}$, entonces $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ si y sólo si cumplen las siguientes condiciones:

1. $0 \in W$. $(W \neq \varnothing)$
2. Si u y v están en $\mathbb{W}$, entonces $u + v$ está en $\mathbb{W}$.
3. Si u está en $\mathbb{W}$ y c es cualquier escalar, entonces cu está en $\mathbb{W}$.

Observación: Si el vector 0 no está en $\mathbb{W}$ entonces $\mathbb{W}$ NO es un subespacio de $\mathbb{V}$.

EJEMPLOS

1. El subespacio más simple de un EV es
$$W = \{0\}$$
Este subespacio se denomina **subespacio cero.**
2. El conjunto solución de un SELH en n variables es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
3. Otro subespacio inmediato de $\mathbb{V}$ es el mismo $\mathbb{V}$.
4. El conjunto de todas las funciones polinómicas es un subespacio del EV formado por todas las funciones continuas definidas en la toda la recta real $C(-\infty, \infty)$.

Definición (Combinación lineal)

Un vector v en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ se denomina combinación lineal (CL) de los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_k$ en $\mathbb{V}$ si v puede expresarse en la forma

$$v = c_1 u_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k u_k$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son escalares.

Ejemplo

El vector $v_1 = (1, 3, 1)$ es CL de los vectores $v_2 = (0, 1, 2)$ y $v_3 = (1, 0, -5)$ porque

$$v_1 = 3v_2 + v_3$$

EJEMPLOS

1. Escribamos el vector $w = (1, 1, 1)$ como una CL de los vectores del conjunto
$$S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-1, 0, 1)\}$$
2. Escribamos el vector $w = (1, -2, 2)$ como una CL de los vectores del conjunto
$$S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-1, 0, 1)\}$$

DEFINICIÓN (Conjunto generador)

Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{V}$. El conjunto S se denomina conjunto generador de $\mathbb{V}$ si todo vector de $\mathbb{V}$ puede expresarse como una CL de vectores de S. En estos casos se dice que S genera a $\mathbb{V}$ y se denota

$$\mathbb{V} = Gen(S) = Gen(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$$

EJEMPLO

El conjunto $S = \{(1,0),(0,1)\}$ genera a $\mathbb{R}^2$, ya que cualquier vector $v = (v_1, v_2)$ puede escribirse como CL de los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ como

$$v = (v_1, v_2) = v_1(1,0) + v_2(0,1)$$

EJEMPLOS

1. Veamos si el conjunto
$$S = \{(1,2,3), (0,1,2), (-2,0,1)\}$$
genera a $\mathbb{R}^3$.
2. Veamos si el conjunto
$$S = \{(1,2,3), (0,1,2), (-1,0,1)\}$$
genera a $\mathbb{R}^3$. (Utilicemos el ejemplo anterior, de CL).

TEOREMA

Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un conjunto de vectores del espacio vectorial $\mathbb{V}$, entonces
$$Gen(S)$$
es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Para un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ en un EV $\mathbb{V}$, la ecuación vectorial

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k = 0$$

siempre tiene la solución trivial $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$. Sin embargo, a menudo también hay soluciones no triviales. Así, en el ejemplo de CL (15) se vio que en el conjunto que en el conjunto

$$S = \{(1, 3, 1), (0, 1, 2), (1, 0, -5)\}$$

el vector $(1, 3, 1)$ puede expresarse como una CL de los otros dos como:

$$v_1 = 3v_2 + v_3$$

De donde la ecuación vectorial

$$v_1 - 3v_2 - v_3 = 0$$

tiene una solución no trivial en la cual no todos los coeficientes son iguales a cero:

$$c_1 = 1, c_2 = -3, c_3 = -1$$

Esta característica se describe al decir que el conjunto S es linealmente dependiente. Si la única solución hubiese sido la trivial $(c_1 = c_2 = c_3 = 0)$, entonces el conjunto S sería linealmente independiente. Este concepto es esencial en álgebra lineal, por lo que se plantea formalmente en la siguiente definición.

DEFINICIÓN (DEPENDENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL)

Un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ se denomina linealmente independiente (LI) si la ecuación vectorial

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k = 0$$

tiene sólamente la solución trivial $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$.
Si también hay soluciones no triviales, entonces S se denomina linealmente dependiente (LD).

EJEMPLOS

1. El conjunto de vectores $S = \{(1,0),(0,1)\}$ es LI.
2. El conjunto de vectores $S = \{(1,0),(0,1),(2,5)\}$ es LD.
3. El conjunto de vectores $S = \{(0,0),(2,1)\}$ es LD.
4. El conjunto de vectores $S = \{(1,2,3),(0,1,2),(-2,0,1)\}$ es LI.