SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (SEL)

Una ***ecuación lineal*** es cualquier expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

Cada $a_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1,2,3,\cdots,n$ se conocen como los coeficientes de la ecuación y $b \in \mathbb{R}$ se le llama término independiente o constante de la ecuación. Cada x_i $(i = 1,2,3,\cdots,n)$ se denominan incógnitas. En caso de que $b = 0$, la ecuación se llama ***homogénea*** y en caso contrario se llama ***no homogénea***.

- **Ejemplo 18:**

- Ecuaciones homogéneas:

$$5x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - x_3 = 0 \qquad -x + 4y - 5x + 2v = 0$$

- Ecuaciones no homogéneas:

$$2x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = 5 \qquad 4x - 2y + z - \frac{1}{2}v = 2$$

- SOLUCIÓN

Una solución de la ecuación (1) es una n-upla $(s_1; s_2; s_3;\dots; s_n)$ de números reales que al ser reemplazadas en cada una de las variables $x_1; x_2; x_3;\dots; x_n$ respectivamente, satisfacen la ecuación. El conjunto de todas las soluciones de la ecuación (1) Recibe el nombre de conjunto solución.

SEL 2x2

La grafica de una ecuación de la forma $ax + by = c$ es una recta y cada para (x, y) que satisfaga la ecuación es una solución de la ecuación y representa las coordenadas de un punto sobre la recta.

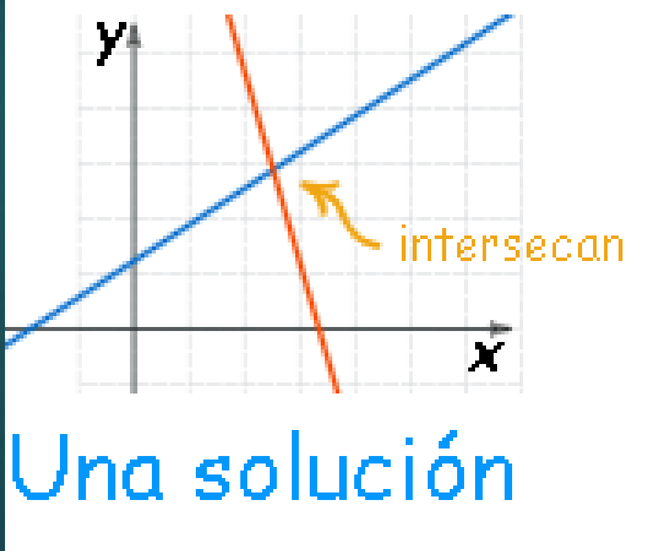
Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables x y y, se puede escribir de la forma

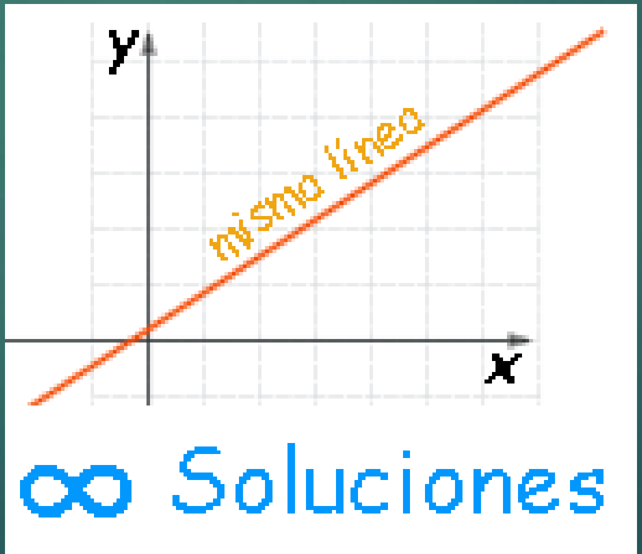
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

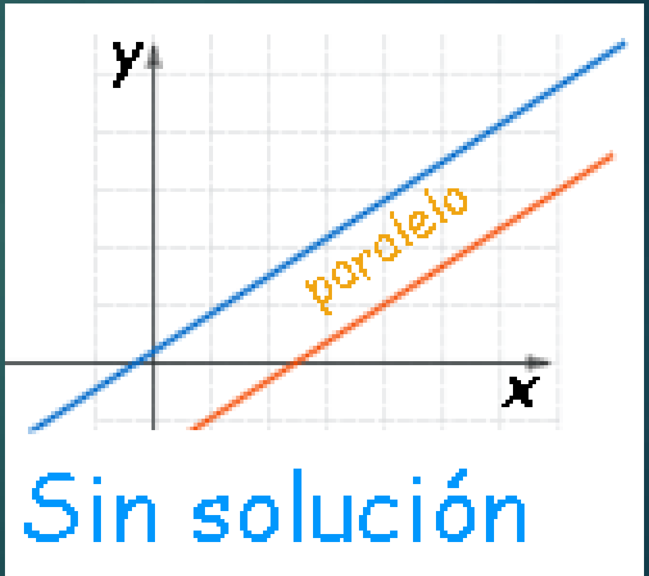
y resolver este sistema donde a_1, b_1, a_2, b_2 son números reales y las variables x, y tienen exponente uno (de ahí el nombre de lineal) es encontrar todos los pares (x, y) que satisfacen las dos ecuaciones simultáneamente.

Como cada una de las ecuaciones representa una recta, la solución del sistema significará encontrar el (los) puntos que estén en ambas rectas y por lo tanto, es encontrar la intersección de las dos rectas.

- Si las rectas se cortan en un punto, el sistema tiene solución única.
- Si las rectas son paralelas coincidentes, todos sus puntos coinciden, el sistema tiene infinitas soluciones.
- Si las rectas son paralelas disjuntas, no tiene puntos en común, el sistema no tiene solución.







SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Un ***sistema lineal*** de m ecuaciones con n variables o incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ es un conjunto de m ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

Cada $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \cdots, m\,;\, j = 1, \cdots, n)$ y son llamados ***coeficientes*** del sistema (2), $b_1, b_2, \cdots, b_m$ son ***términos constantes*** o independientes.

Cuando $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, el sistema (2) es denominado ***homogéneo.*** Si al menos uno de los términos constantes es distinto de cero, el sistema se llama ***no homogéneo.***

2.3 Representación matricial de un SEL.

Consideremos la matriz cuyos elementos o entradas son los coeficientes de (2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Esta matriz recibe el nombre de ***matriz de coeficientes*** del sistema.

Formemos ahora una matriz columna cuyas componentes sean los términos independientes del sistema (2), esto es:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

Finalmente consideremos la matriz columna cuyos componentes sean las incógnitas de (2), esto es:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

La matriz anterior se llama ***matriz incógnita.***

Usando la multiplicación de matrices y la definición de igualdad de matrices se puede escribir

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (3)$$

Representación Matricial

$$A \,.\, X = B$$

La representación del sistema de ecuaciones lineales (2) dada por (3), se denomina ***representación matricial*** del sistema. En este caso, escribiremos $A \cdot X = B$.

En lugar de escribir el sistema $AX = B$ completo, se va a utilizar lo que se llama ***matriz aumentada*** del sistema, es decir,

$$(A|B) := \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Las operaciones que se le hacían a las ecuaciones para obtener sistemas equivalentes serán operaciones elementales entre filas.

Ejemplo 19:

Hallar la representación matricial del siguiente sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z & = & 1 \\ 3x + 5y + z & = & -2 \\ 2x - 8z & = & 1 \end{cases}$$

Solución: formemos las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema dado se puede representar como

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Ejemplo 20:**

Escribe el sistema de ecuaciones correspondiente a

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución: el sistema correspondiente es

$$\begin{cases} 4x - 5y + 0z & = & 3 \\ -x + 0y - 2z & = & -1 \end{cases}$$

O equivalentemente

$$\begin{cases} 4x - 5y & = & 3 \\ -x - 2z & = & -1 \end{cases}$$

CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS

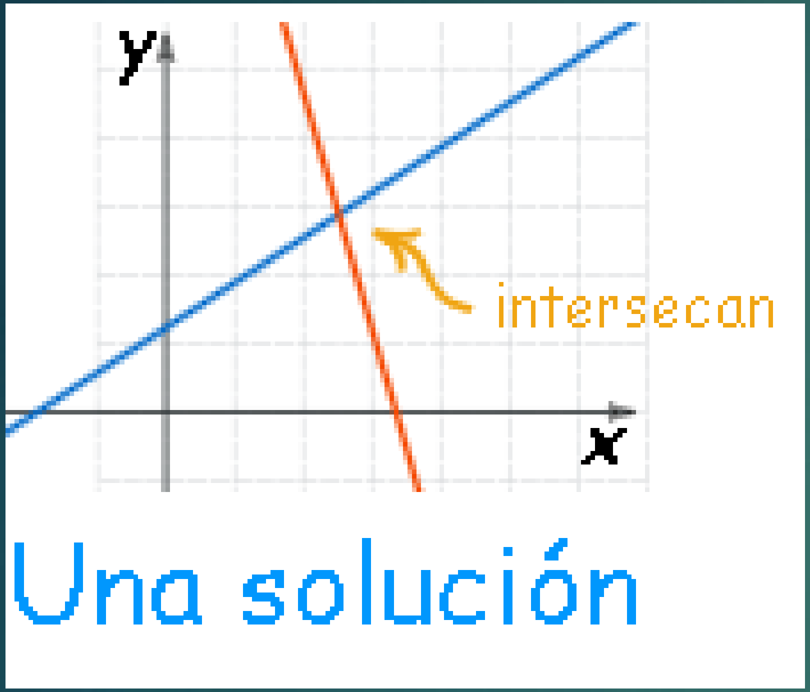
- Un sistema de ecuaciones lineales es consistente o compatible si tiene solución.

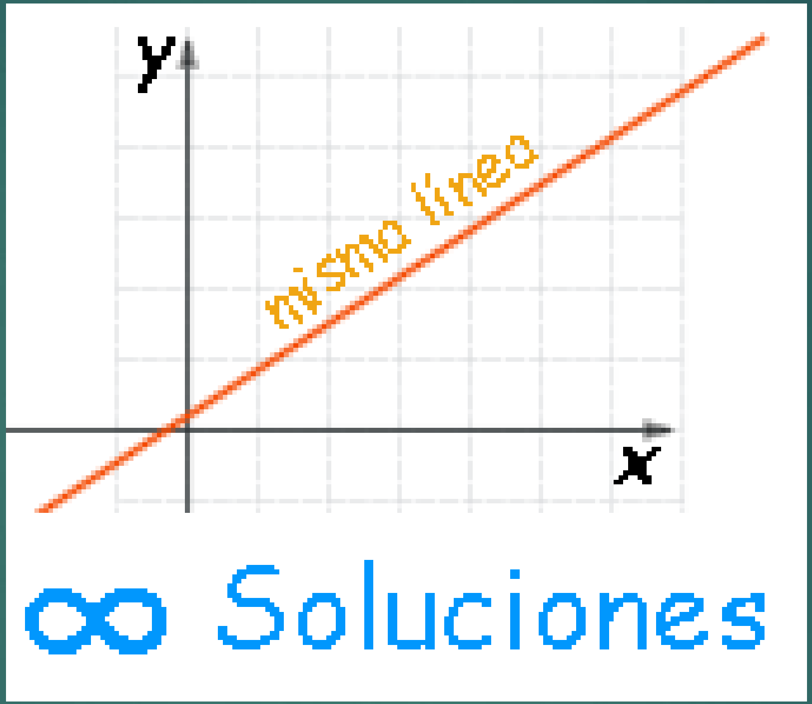
- Un sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado si tiene una única solución.

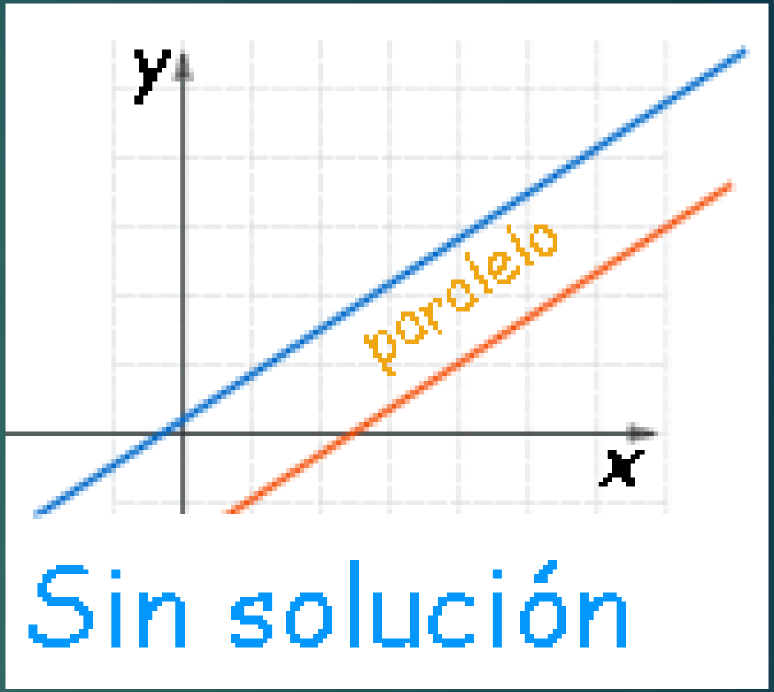
- Un sistema de ecuaciones lineales es compatible indeterminado si tiene infinitas soluciones.

- Un sistema es inconsistente o incompatible si no tiene solución

SEL 2x2 en IR²:





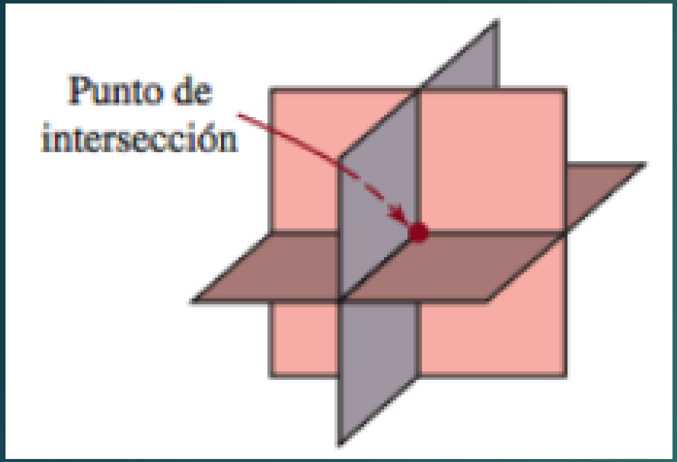


Sistema compatible determinado

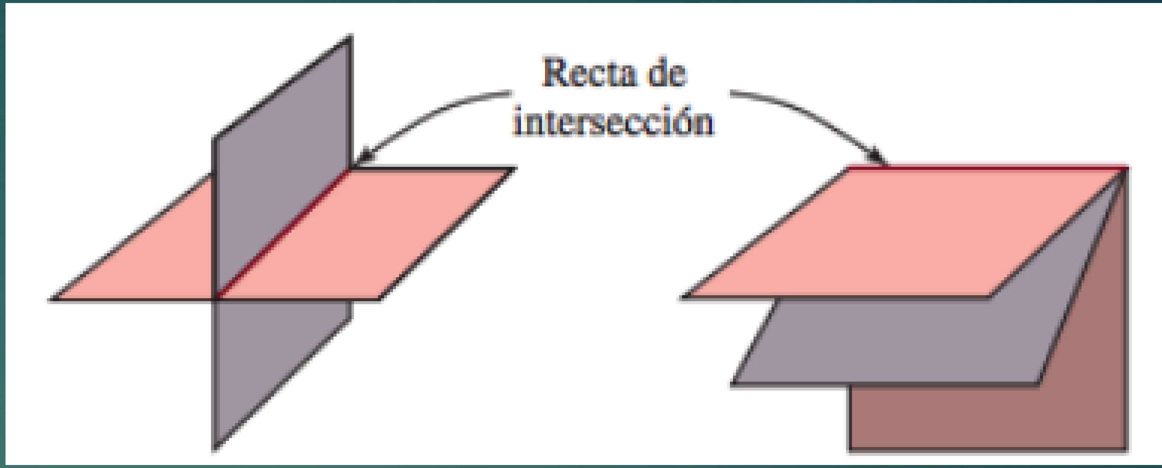
Sistema compatible indeterminado

Sistema incompatible o inconsistente

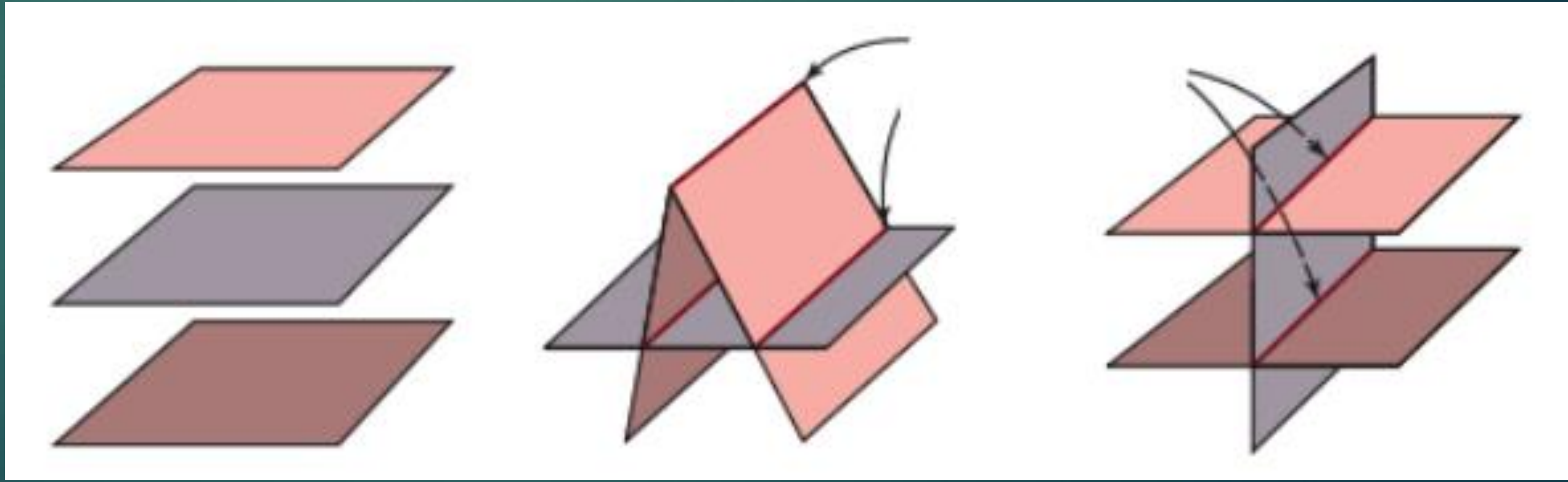
SEL 3x3 en IR³:



Sistema compatible determinado



Sistema compatible indeterminado



Sistema incompatible o inconsistente

- **Definición 31:**

Supongamos que $A \cdot X = B$ y $C \cdot X = D$ son dos sistemas de m ecuaciones y n variables. Diremos que son ***sistemas equivalentes*** si $(A|B)$ y $(C|D)$ son equivalentes por filas.

- **Teorema 14:**

Si dos sistemas de ecuaciones son equivalentes, entonces tienen el mismo conjunto solución.

TEOREMA DE ROUCHE-FROBENIUS O KRONECKER

- Sea $A.X = B$ un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones con n incógnitas y sea $A|B = A'$ la matriz aumentada o ampliada del sistema con los términos independientes de orden mx(n+1). Entonces:
- Si $\rho(A) = \rho(A') = n$, el SEL es compatible determinado, tiene solución única.
- Si $\rho(A) = \rho(A') < n$, el SEL es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. El grado de libertad del SEL es $g = n - \rho(A)$.
- Si $\rho(A) \neq \rho(A')$, el SEL es incompatible o inconsistente, no tiene solución.

Método de eliminación de Gauss

Este método consiste en llevar la matriz ampliada del sistema a su forma escalonada para luego despejar una incógnita de la última ecuación y luego Se usa la sustitución hacia atrás.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

S = {(4;-2;3)}

Método de Gauss-Jordan

Este método consiste en llevar la matriz ampliada del sistema a su forma escalonada REDUCIDA para luego ir despejando cada una de las incógnitas.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 7 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$$

SISTEMAS CUADRADOS

- Son aquellos que tienen igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas.

MÉTODO MATRICIAL INVERSO

Si A es una matriz de orden nxn, inversible o no singular, entonces el sistema lineal AX = B, es compatible determinado y su solución es X = $A^{-1}.B$.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 1 \\ y - z = -3 \\ 3x + 5y + 7z = 6 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$