Álgebra Lineal - UNCuyo - 2024

Trabajo Práctico 3- Parte 1

Operaciones de matrices

1. Determine $A+B$, $A-B$, $2A$, $2A-B$ y $B+\frac{1}{2}A$ para los siguientes casos.

   a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$

   b) $A=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$

2. Sean $A=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Resuelva para X.

   a) $3X+2A=B$

   b) $X-3A+2B=0$

   c) $2A-5B=3X$

3. Determine AB y BA, en cada caso donde estén definidas.

   a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$

   b) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

   c) $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

   d) $A=\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 10 & 12 \end{pmatrix}$

4. Determine las condiciones para w, x, y y z tales que $AB=BA$ siendo

$$A=\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Exprese la matriz columna b como una combinación lineal de las columnas de A.

   a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $b=\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

   b) $A=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 3 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ y $b=\begin{pmatrix} -22 \\ 4 \\ 32 \end{pmatrix}$

6. Muestre que si $AC = BC$, entonces A no necesariamente es igual a B utilizando las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Muestre que si $AB = 0$, entonces no es necesariamente cierto que $A = 0$ o $B = 0$ utilizando las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Sean A y B matrices de 3×3, donde A es diagonal.

   a) Describa el producto AB. Ilustre su respuesta con ejemplos.

   b) Describa el producto BA. Ilustre su respuesta con ejemplos.

   c) Analice cómo cambian los resultados de los incisos *a*) y *b*) si los elementos de la diagonal de A son iguales.

9. Explique por qué las siguientes fórmulas no son válidas para matrices.

   a) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

   b) $(A+B)(A+B) = A^2 + 2AB + B^2$

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Realice las siguientes operaciones

    a) A^2

    b) A^4

    c) $(A+I)^2$

11. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Realice las siguientes operaciones

    a) A^{19}

    b) A^{20}

12. Sean $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

    a) Determine A^2, A^3 y A^4. Identifique cualquier similitud entre i^2, i^3 e i^4.

    b) Determine e identifique B^2.

13. Considere la siguiente igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1-2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

    a) Verifique para $n = 1$

    b) Verifique para $n = 2$

    c) Verifique para $n = 3$

    d) (*) Probar la igualdad en (1) para todo $n = 1, 2, \ldots$ haciendo la demostración por inducción matemática.

14. Determine la traza de cada matriz.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

15. Sean A y B matrices cuadradas de orden n y c un escalar. Demuestre que

    a) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

    b) $tr(cA) = ctr(A)$

16. Determine A^T, AA^T y A^TA, en cada caso.

    a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

    b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

17. Dé un ejemplo de dos matrices A, B de orden 2 tales que $(AB)^T \neq A^TB^T$

18. Determine cuál de las siguientes matrices es simétrica, cuál antisimétrica o ninguna de las dos.

    a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

    b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

    c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

    d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

19. Sea A una matriz cuadrada de orden n.

    a) Demuestre que $\frac{1}{2}(A + A^T)$ es simétrica.

    b) Demuestre que $\frac{1}{2}(A - A^T)$ es antisimétrica.

    c) Demuestre que A puede ser escrita como la suma de una matriz simétrica B y una antisimétrica C, $A = B + C$.

    d) Escriba la siguiente como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -3 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

20. Encuentre, si es existe, la inversa de las siguientes matrices.

    a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

    b) $\begin{pmatrix} -7 & 33 \\ 4 & -19 \end{pmatrix}$

    c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

    d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

    e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -10 \\ 7 & 16 & -21 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ -0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ *g*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

21. Encuentre la inversa de las siguientes matrices diagonales. Obtenga una conclusión sobre la inversa de las matrices diagonales.

    a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

22. Los siguientes sistemas tienen solución única, resuélvalos utilizando el método de la matriz inversa.

    a) $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + 2y - z = 4 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$

    b) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$ *d*) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \\ x - 2y + z = -3 \end{cases}$

23. Determine el valor de x tal que la matriz sea igual a su inversa.

    a) $\begin{pmatrix} 3 & x \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

24. Determine el valor de A tal que

    a) $(2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *b*) $(4A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

25. Sea A una matriz inversible, demuestre las siguientes propiedades.

    a) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, para k entero positivo.
    b) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
    c) Si A es simétrica, A^{-1} es una matriz simétrica.

26. Responda. La suma de dos matrices inversibles ¿es inverisble? Explique por qué si o por qué no. Muestre un ejemplo apropiado.