Análisis Matemático I
Clase 11: Teorema del Valor Medio y consecuencias. Criterio de la derivada primera para funciones crecientes y decrecientes.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2024

Teorema del Valor Medio

Teorema del Valor Medio

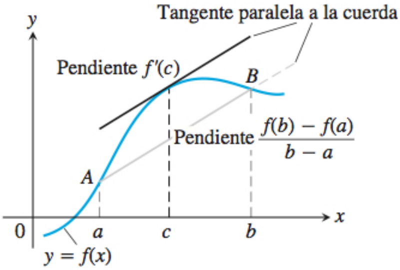
Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces, existe c en (a, b) tal que:

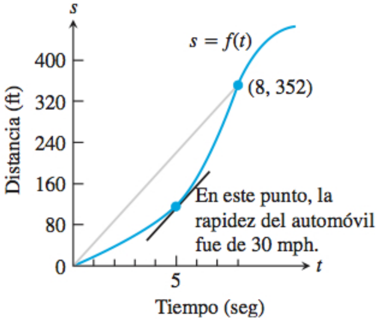
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema del Valor Medio

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces, existe c en (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$





Así, el Teorema del Valor Medio dice que, bajo hipótesis adecuadas, la tasa de cambio promedio de una función en un intervalo es igual a la tasa de cambio instantánea de la función en algún punto interior del intervalo

Consecuencias del Teorema del Valor Medio

Teorema

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que:

$$f'(x) = 0$$

para todo x en (a, b). Entonces f es una función constante en $[a, b]$.

Demostración: sean $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$. Vamos a probar que $f(x) = f(y)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x < y$. Entonces, como f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[x, y]$, existe $c \in (x, y)$ tal que:

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Como $f' = 0$ en (a, b) y $c \in (a, b)$, se tiene $f'(c) = 0$.

Teorema

Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) tales que:

$$f'(x) = g'(x)$$

para toda x de (a, b), entonces existe una constante C tal que:

$$f(x) = g(x) + C \qquad \text{para toda } x \in [a, b].$$

Demostración: sea $h(x) = f(x) - g(x)$. Entonces h es continua en el intervalo $[a, b]$ (pues es una diferencia de funciones continuas) y h es derivable en (a, b) (ya que es una diferencia de funciones derivables).

Consecuencias del Teorema del Valor Medio

Además, como por hipótesis $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, se obtiene:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para todo $x \in (a, b)$. Por la primera consecuencia del teorema del valor medio, se tiene que h es una función constante en $[a, b]$. Por lo tanto, existe una constante C tal que:

$$h(x) = C$$

para todo $x \in [a, b]$. Recordando que $h(x) = f(x) - g(x)$, se llega a :

$$f(x) = g(x) + C$$

para toda x en $[a, b]$.

Funciones crecientes y decrecientes

Vamos a considerar funciones crecientes o decrecientes con desigualdades estrictas:

- Decimos que f es creciente en D si:

$$f(x) < f(y)$$

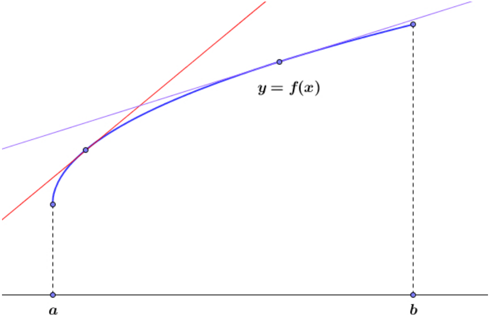
para todo x y y en D tales que: $x < y$.

- Decimos que f es decreciente en D si:

$$f(x) > f(y)$$

para todo x y y en D tales que: $x < y$.

La función de la siguiente figura es creciente en $[a, b]$:



Observar que si trazamos las rectas tangentes en cada punto de la gráfica de $y = f(x)$ para $x \in (a, b)$ se tiene que las pendientes de dichas rectas son positivas. Es decir, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Basado en esta observación, se da ahora un criterio para determinar dónde crece o decrece una función derivable en términos del signo de f'.

Funciones crecientes y decrecientes

Prueba de la derivada primera para funciones crecientes o decrecientes

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces:

- Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Observación: si en el teorema anterior f es continua solamente en (a, b), entonces se debe reemplazar $[a, b]$ por (a, b) en las dos implicaciones. Además, el teorema puede aplicarse a funciones con dominios que no consisten solamente en un intervalo como veremos en el próximo ejemplo.

Demostración de la prueba de la derivada primera para funciones crecientes y decrecientes

Demostración: vamos a probar el primer ítem. El segundo queda como ejercicio para el estudiante. Supongamos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Sean $x, y \in [a, b]$ tales que:

$$x < y.$$

Entonces f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[x, y]$ y por ende existe $c \in (x, y)$ tal que:

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Como por hipótesis $f'(c) > 0$ y además $y - x > 0$, obtenemos que:

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0$$

y entonces:

$$f(y) > f(x),$$

lo cual prueba que la función f es creciente en $[a, b]$.

Ejemplo: determine los intervalos donde $f(x) = x^3 - 12x - 5$ es creciente y donde es decreciente.
Antes de resolver el problema tener en cuenta que: para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, vamos a determinar los intervalos donde f' es positiva y donde es negativa. Para ello, se deben distinguir los puntos donde f' cambia de signo. Estos se encuentran, en los casos que abordaremos en este curso, en:

- los puntos críticos, es decir, puntos **interiores** del dominio de f donde la derivada es cero o no existe
- los extremos o puntos frontera del dominio de f
- los puntos de discontinuidad de f.

Solución del ejemplo: observar que f tiene por dominio $\mathbb{R}$ y que es continua en todo $\mathbb{R}$. Por ende, los únicos puntos que se deben considerar para analizar el cambio de signo de f' son los puntos críticos.
Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2).$$

Dado que f' existe para todo $x \in \mathbb{R}$, los únicos puntos críticos son aquellos donde f' es cero. En este caso:

$$x_1 = 2 \qquad \text{y} \qquad x_2 = -2.$$

Analizamos los signos de f' en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$.

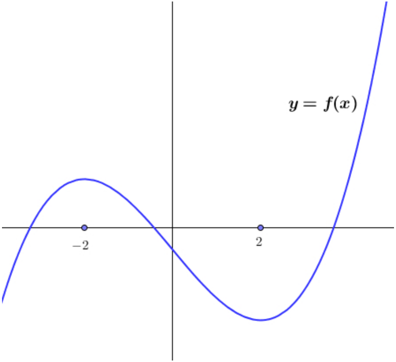
Funciones crecientes y decrecientes

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
valor de prueba	-3	0	3
signo de f'	$+$	-	$+$
Conclusión	f es creciente	f es decreciente	f es creciente

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
valor de prueba	-3	0	3
signo de f'	$+$	-	$+$
Conclusión	f es creciente	f es decreciente	f es creciente

En la próxima clase veremos cómo el análisis anterior nos permite obtener extremos locales de f.

Observar que en el ejemplo anterior no se dijo que f es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. De hecho, si consideramos el gráfico de f:



concluimos que f no es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ pues hay puntos cercanos a 2 donde f asume valores más chicos que en puntos cercanos a -2. Así, los intervalos donde una función crece o decrece deben colocarse de forma separada:

la función f es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$.