Análisis Matemático I
Clase 12: Aplicaciones de la derivada: funciones crecientes y decrecientes. Concavidad.

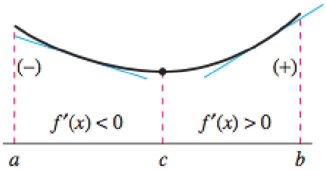
Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

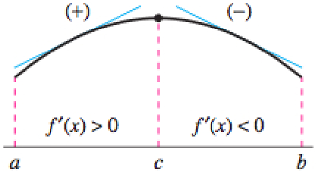
Abril, 2024

Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos

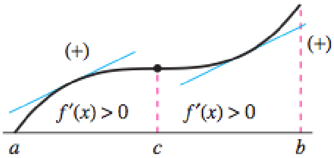
Considere los siguientes gráficos. Observe en cada situación cómo cambia el signo de f' alrededor del punto crítico $x = c$:

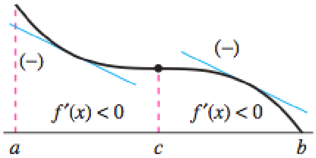


Mínimo relativo



Máximo relativo





Ni mínimo relativo ni máximo relativo

Criterio de la derivada primera para extremos locales

Criterio de la derivada primera para extremos

Sea f una función continua en $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$ un punto crítico de f. Supongamos que f es derivable en (a, b), excepto posiblemente en c. Al aumentar el valor de la variable independiente x,

- si f' cambia de positiva a negativa alrededor de c, entonces f tiene un máximo local en $x = c$,
- si f' cambia de negativa a positiva alrededor de c, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$,
- si f' no cambia de signo alrededor de c, entonces f no tiene extremo local en $x = c$.

Criterio de la derivada primera para extremos locales

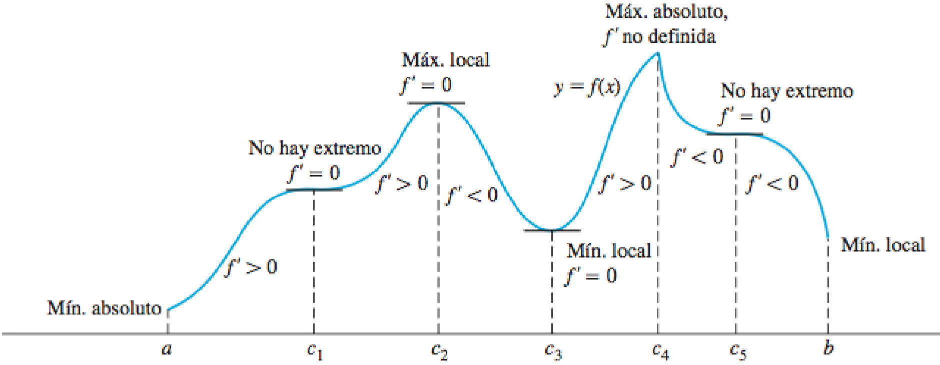
Criterio de la derivada primera para extremos

Sea f una función continua en $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$ un punto crítico de f. Supongamos que f es derivable en (a, b), excepto posiblemente en c. Al aumentar el valor de la variable independiente x,

- si f' cambia de positiva a negativa alrededor de c, entonces f tiene un máximo local en $x = c$,
- si f' cambia de negativa a positiva alrededor de c, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$,
- si f' no cambia de signo alrededor de c, entonces f no tiene extremo local en $x = c$.

Observación: el criterio de extremos locales también se aplica a los extremos del intervalo a y b, pero sólo hay que analizar el signo de $f'(x)$ a un lado (derecho o izquierdo) de a o de b y para toda x suficientemente cercana a estos puntos (utilizar la siguiente figura para explicar).

Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos



Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos

Ejemplo: sea $f(x) = x^{1/3}(x-4)$. Determine los intervalos donde f crece y/o decrece, y los extremos relativos de f.

Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos

Ejemplo: sea $f(x) = x^{1/3}(x-4)$. Determine los intervalos donde f crece y/o decrece, y los extremos relativos de f. **Solución:** primero calculamos la derivada de f usando la regla del producto:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}(x-4) + x^{1/3}.$$

Observar que f' no existe en $x = 0$ y que este punto pertenece al dominio de f. Luego, $x = 0$ es un punto crítico. Analizaremos si f' se anula en algún punto:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{3}x^{-2/3}(x-4) + x^{1/3} = 0$$

Multiplicamos por $x^{2/3}$ ambos miembros:

$$\frac{1}{3}(x-4) + x = 0$$

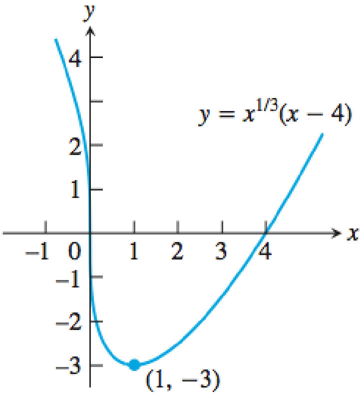
$$\frac{4}{3}x - \frac{4}{3} = 0$$
$$x = 1.$$

Así, $x = 1$ es también un punto crítico.
Para analizar los intervalos donde f crece o decrece tenemos en cuenta los puntos críticos de f y los extremos del dominio. Dado que el dominio de f es $\mathbb{R}$, los únicos intervalos a considerar son:

$$(-\infty, 0), \quad (0, 1) \quad \text{y} \quad (1, \infty).$$

intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
punto de análisis	-1	$1/2$	2
signo de f'	$f'(-1) < 0$	$f'(0) < 0$	$f'(2) > 0$
Conclusión	f es decreciente	f es decreciente	f es creciente

En base a la tabla anterior y al criterio de la derivada primera para extremos tenemos que f tiene un mínimo local en $x = 1$.


y
x
4
2
1
-1
-2
-3
-1
0
1
2
3
4
$y = x^{1/3}(x-4)$
(1, −3)

Uso de la primera derivada

Recordar: la primera derivada de una función nos sirve para:

- determinar los intervalos donde la función crece y/o decrece.
- decidir si en un determinado punto crítico se tiene un máximo local, un mínimo local o ninguno de los dos.

Uso de la primera derivada

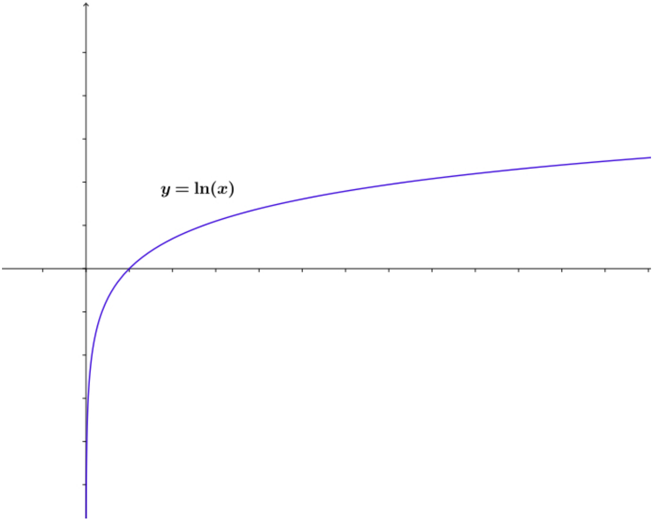
Recordar: la primera derivada de una función nos sirve para:

- determinar los intervalos donde la función crece y/o decrece.
- decidir si en un determinado punto crítico se tiene un máximo local, un mínimo local o ninguno de los dos.

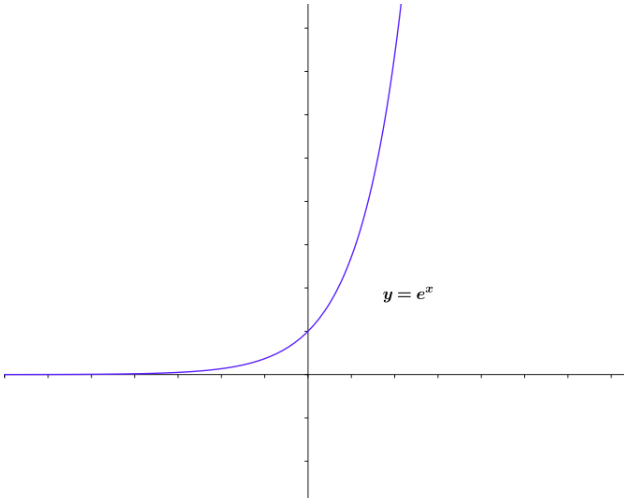
A continuación vamos a usar la segunda derivada para distinguir la *curvatura* de la gráfica de una función.

Concavidad

Para introducir el concepto de concavidad de funciones, vamos a comenzar observando las siguientes gráficas:



Concavidad

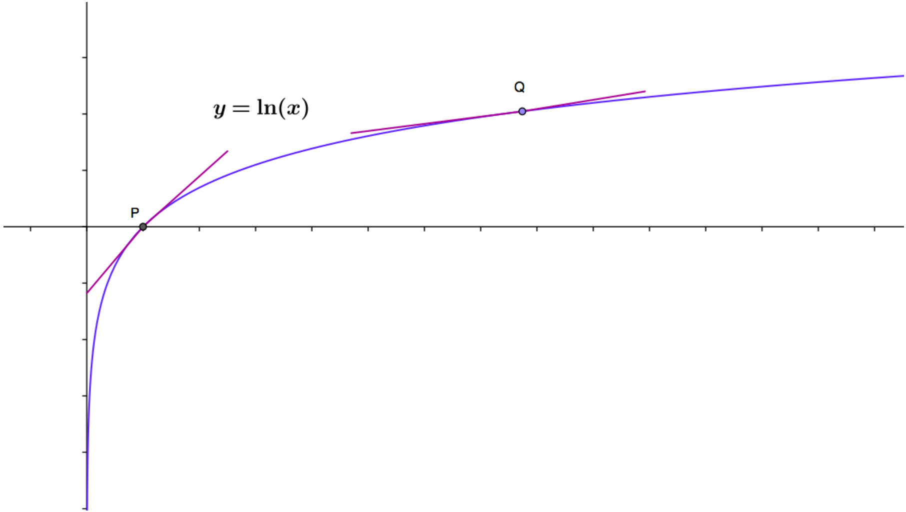


Concavidad

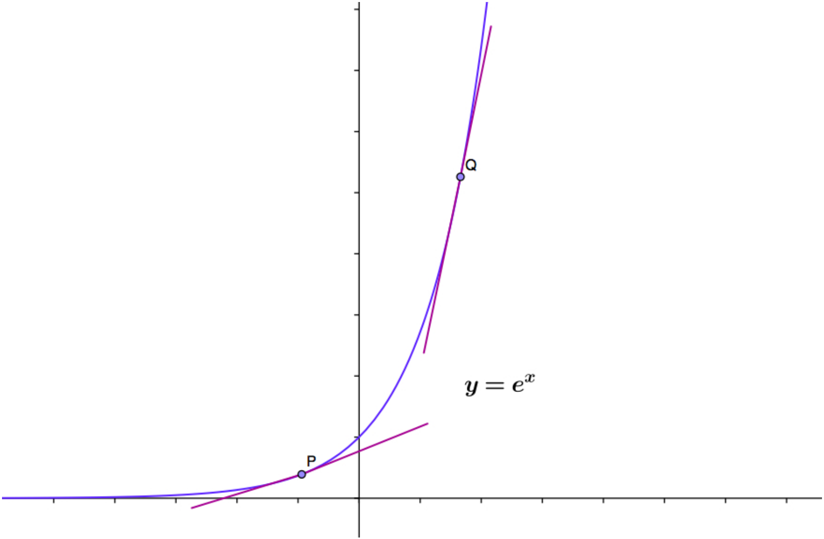
Tanto la función logarítmica como la exponencial son funciones crecientes. Sin embargo, la función $y = \ln(x)$ **desacelera** su crecimiento a medida que x aumenta, mientras que $y = e^x$ **acelera** su crecimiento cuando nos movemos en la dirección de las x positivas. En ambos casos las derivadas son positivas, pero no permiten distinguir el **ritmo** de crecimiento (o decrecimiento) de una función. Veremos que esta distinción la brinda la derivada segunda.

Comencemos trazando algunas rectas tangentes a las funciones logarítmica y exponencial.

En el caso de $y = \ln(x)$, se observa a partir de la comparación de las pendientes de las rectas tangentes en P y Q que a medida que x aumenta, la derivada de $y = \ln(x)$ decrece.



Por otro lado, en el caso de $y = e^x$, se deduce que la derivada de la función exponencial es creciente.



Concavidad

Concavidad: el comportamiento de la derivada de una función (en cuanto a si es creciente o decreciente) nos indica si la gráfica se *curva* hacia arriba o hacia abajo. Definimos entonces el concepto de concavidad como sigue:

Definición de Concavidad

Sea f una función derivable en (a, b). Tenemos:

- si f' es creciente en (a, b), entonces decimos que f es cóncava hacia arriba en (a, b),
- si f' es decreciente en (a, b), entonces decimos que f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Criterio de la segunda derivada para concavidad:

Sea f una función dos veces derivable en (a, b), Entonces:

- Si $f'' > 0$ en el intervalo (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b).
- Si $f'' < 0$ en el intervalo (a, b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Observación: la notación f'' indica derivada segunda de f. Otras formas de escribir la derivada segunda son:

$$y'' \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Concavidad: ejemplo

Dado que para determinar los intervalos de concavidad de una función f se deben analizar los signos de f'', tenemos que encontrar los puntos alrededor de los cuales f'' cambia de signo. Estos puntos se localizan en:

- los puntos interiores del dominio de f donde f'' es cero o no existe;
- los puntos de discontinuidad de f;
- los extremos o *bordes* del dominio de f.

Ejemplo: determinar los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de la función:

$$f(x) = \frac{6}{x^2 + 3}.$$

Concavidad: ejemplo

Solución: observar que el dominio de f es $\mathbb{R}$, por ende no hay puntos *borde* para el dominio. También, f es continua en $\mathbb{R}$ pues es función racional y no hay ningún x que anule el denominador. Así, los únicos puntos a considerar para obtener los intervalos de concavidad son los puntos donde f'' es cero o no existe.

Concavidad: ejemplo

Solución: observar que el dominio de f es $\mathbb{R}$, por ende no hay puntos *borde* para el dominio. También, f es continua en $\mathbb{R}$ pues es función racional y no hay ningún x que anule el denominador. Así, los únicos puntos a considerar para obtener los intervalos de concavidad son los puntos donde f'' es cero o no existe. Calculamos f'':

$$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{-12(x^2+3)^2 + 12x.2(x^2+3).2x}{(x^2+3)^4} = \frac{-12x^2 - 36 + 48x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{36x^2 - 36}{(x^2+3)^3}$$

Observar que f'' siempre existe. Luego los únicos puntos de interés son aquellos donde:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \quad x = 1, -1.$$

Construimos una tabla con los intervalos definidos por 1 y -1:

intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
punto muesta	-2	0	2
signo de f''	$+$	-	$+$
Conclusión	Conc. hacia arriba	Conc. hacia abajo	Conc. hacia arriba

Concavidad: ejemplo