# ÁLGEBRA (LCC)

## UNIDAD 3 - MATRIZ INVERSA

Licenciatura en Ciencias de la Computación
FING - UNCuyo

# Conceptos

## DEFINICIÓN (Matriz inversa)

Una matriz $A$ de orden $n$ es inversible (o no singular) si exsite una matriz $B$ de orden $n$ tal que

$$AB = BA = I_n$$

La matriz $B$ se denomina inversa de $A$. La matriz $A$ que no tenga inversa se llama no inversible (o singular).

- Las matrices no cuadradas no tienen inversa.
- No todas las matrices cuadradas tienen inversa.

## TEOREMA

Si $A$ es una matriz inversible, entonces su inversa es única.

*Demostración*

- Ahora es posible hablar de "la" inversa de $A$, que se denota por $A^{-1}$.
- Resulta $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

## EJEMPLO

La inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ es $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. En efecto,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nos preguntamos cómo determinar la inversa de una matriz.

## EJEMPLO

Para determinar la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ necesitamos hallar $X$ en la ecuación $AX = I$.

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo el producto e igualando las matrices, se obtiene el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x_{11} & + & 4x_{21} & = & 1 \\ -x_{11} & - & 3x_{21} & = & 0 \\ x_{12} & + & 4x_{22} & = & 0 \\ -x_{12} & - & 3x_{22} & = & 1 \end{array} \right.$$

De donde podemos obtener los siguientes dos sistemas, que tienen la misma matriz de coeficientes.

$$\begin{cases} x_{11} + 4x_{21} = 1 \\ -x_{11} - 3x_{21} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{12} + 4x_{22} = 0 \\ -x_{12} - 3x_{22} = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el primer sistema, tenemos la primera columna de $X$ y resolviendo el segundo sistema, tenemos la segunda columna de $X$. En vez de resolver los dos sistemas por separado, podemos hacerlo simultáneamente. A la matriz de coeficientes la ampliamos con dos columnas, asociadas a los términos independientes de cada sistema. Obtenemos,

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Aplicando eliminación de Gauss-Jordan a esta matriz, resolvemos ambos sistemas y obtenemos la solución para $X$, es decir, obtenemos la matriz inversa de $A$.

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hacemos cero el elemento $a_{21}$ sumando la primer fila con la segunda fila: $\boldsymbol{F_1 + F_2 \rightarrow F_2}$

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hacemos cero el elemento $a_{12}$ sumando $-4$ veces la segunda fila con la primera fila: $\boldsymbol{-4F_2 + F_1 \rightarrow F_1}$

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Luego,

$$X = \left(\begin{array}{rr} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$$

## Resumen

- Aplicando eliminación de Gauss-Jordan a la matriz aumentada obtenemos
$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right)$$
- Este procedimiento funciona para cualquier matriz de orden $n$.
- Si $A$ no puede reducirse a la identidad, entonces $A$ no es inversible.

## EJEMPLO

Apliquemos este método a la matriz de orden $2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, para concluir que $A$ es inversibe si y sólo si $ad - bc \neq 0$ y que
$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

## Teorema

Sean $A$ y $B$ dos matrices inversibles del mismo tamaño, entonces

1. $AB$ es una matriz inverisble.
2. La inversa de $AB$ es $B^{-1}A^{-1}$, es decir, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

El teorema se puede extender a tres o más matrices, es decir,

$$(A_1A_2\ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

## Propiedades

Sean $A$ es una matriz inversible, $n$ un entero positivo y $c$ un escalar diferente de cero, entonces

1. $A^{-1}$ es una matriz inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $A^n$ es una matriz inversible y $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
3. $cA$ es una matriz inversible y $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$
4. $A^T$ es una matriz inversible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

## EJEMPLO

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, para calcular $A^{-3}$ podemos expresar

$$A^{-3} = (A^{-1})^3$$

Primero veamos que,

$$A^{-1} = \frac{1}{3-2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{pmatrix}$$

Veamos que una aplicación útil de la multiplicacón de matrices es representar un SEL

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

con la ecuación matricial

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Donde $A$ es la matriz de coeficientes del sistema, $x$ es el vector columna de incógnitas y $b$ es el vector columna de términos independientes.

## EJEMPLO

Resolvamos la ecuación matricial $Ax = 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como un SEL se representa

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Haciendo eliminación de Gauss-Jordan en la matriz ampliada asociada a este sistema, obtenemos la solución

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 4t \\ 7t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Veremos ahora una relación importante entre matriz inversa y SEL.

**Teorema**

Sea $A$ una matriz inversible, entonces el SEL $Ax = b$ tiene una solución única dada por

$$x = A^{-1}b$$

*Demostración*

# MATRICES ELEMENTALES

## Definición

Una matriz de orden $n$ se denomina matriz elemental si se puede obtener a partir de la matriz identidad $I_n$ al efectuar una sola operaci̋on elemental en las filas.

## EJEMPLO

Las siguientes son matrices elementales

- Intercambiar la segunda fila con la tercera fila. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Multiplicar por $-3$ la segunda fila $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
- Sumar $5$ veces la tercera fila a la primera. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

### Teorema

Si la matriz elemental $E$ se obtiene de realizar cierta operación elemental en las filas de $I_m$ y si $A$ es una matriz de $m \times n$, entonces el producto $EA$ es la matriz que se obtiene cuando la misma operación se realiza en las filas de $A$.

### EJEMPLO

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz elemental $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

El producto $EA$ es

$$EA = \begin{pmatrix} 11 & 13 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

que es la misma matriz que se obtiene al sumar $5$ veces la tercera fila a la primera de $A$.

## Teorema

Toda matriz elemental es inversible, y la inversa también es una matriz elemental.

- La eliminación gaussiana a menudo precisa de varias operaciones elementales en las filas para reducir una matriz. Para matrices elementales, esta secuencia se traduce en la multiplicación (por la izquierda) por varias matrices elementales.
- El orden de la multiplicación es importante, la matriz elemental inmediata para la izquierda de $A$ corresponde a la operación con renglones ejecutada primero.

## DEFINIC'ON (matrices equivalentes

Sean $A$ y $B$ matrices de $m \times n$. La matriz $B$ es equivalente por renglones con $A$ si existe unnúmero finito de matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tal que

$$B = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A$$

### Teorema

Una matriz cuadrada es inversible si y sólo si puede escribirse como el producto de matrices elementales.

*Demostración.*

### Condiciones equivalentes

Sea $A$ una matriz de orden $n$, las siguientes proposiciones son equivalentes.

- $A$ es inversible.
- $Ax = b$ tiene solución única para cualquier matriz $b$ de $n \times 1$.
- $Ax = 0$ sólo tiene la solución trivial.
- $A$ es equivalente por renglones a $I_n$.
- $A$ puede escribirse como el producto de matrices elementales.
- La forma escalonada reducida de $A$ es $I_n$.