Análisis Matemático I
Clase 14: Aplicaciones de la derivada: Problemas de Optimización. Antiderivadas. Integral definida

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2024

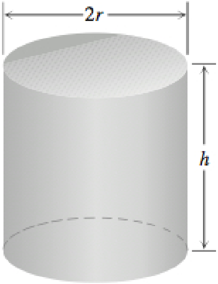
Optimización

Problema 2: se desea diseñar una lata metálica cerrada con capacidad de 1 litro y con la forma de un cilindro circular recto. Determine las dimensiones de la lata que permitan utilizar la menor cantidad de material.

Problema 2: se desea diseñar una lata metálica cerrada con capacidad de 1 litro y con la forma de un cilindro circular recto. Determine las dimensiones de la lata que permitan utilizar la menor cantidad de material.

Solución al problema 2:

- Dibujo y variables: $r =$ radio, $h =$ altura. Ambos en centímetros.



- Función a minimizar: área superficial A.

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Solución al problema 2:

- Relación entre r y h: utilizamos los datos del problema sobre el volumen de 1 litro$=1000\text{cm}^3$:

$$V = \pi r^2 h = 1000$$

de donde se obtiene:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Reemplazando en la función A se obtiene:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}.$$

Observe que r tiene que ser positivo.

Solución al problema 2:

- Buscamos dónde A alcanza su mínimo: encontramos primero los puntos críticos.
$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}.$$
Observar que A' existe para todo $r > 0$. Buscamos r tal que $A'(r) = 0$. Obtenemos:
$$r = \left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3},$$
es el único punto crítico.
- Para determinar si A tiene un mínimo local en el punto crítico, determinamos la segunda derivada y vemos qué signo tiene en el punto crítico (es decir, usamos el criterio de la derivada segunda para extremos relativos). Se obtiene:
$$A''\left[\left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3}\right] > 0.$$

Solución al problema 2:

Luego, A tiene un mínimo local en $r = \left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3}$. La altura correspondiente es:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3}.$$

Antiderivadas

Definición de antiderivada

Decimos que una función F es una antiderivada de f en (a, b) si:

$$F'(x) = f(x) \text{ para todo } x \in (a, b).$$

Dar ejemplos.

Observación: si F es una antiderivada de f en (a, b), entonces:

$$G(x) = F(x) + C,$$

donde C es cualquier constante, es también una antiderivada de f.

Recordar la siguiente consecuencia del teorema del valor medio:

Teorema

Si F y G son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) tales que:

$$F'(x) = G'(x)$$

para toda x de (a, b), entonces existe una constante C tal que:

$$G(x) = F(x) + C$$

para todo x en $[a, b]$.

Así, dos antiderivadas de una función difieren en una constante.

Notación

Sea f una función definida en (a, b). El símbolo:

$$\int f(x)dx$$

representa una antiderivada general de f en (a, b) y se denomina integral indefinida de f.

Ejemplos:

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para $n \neq -1$.
- $\int cos(x)dx = sen(x) + C$
- $\int sen(x)dx = -cos(x) + C$

Propiedades de la integral indefinida

Sean f y g funciones definidas en (a, b), y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
- $\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
- $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$.

Ejemplos:

- $\int (x^4 + 5x - 1)dx = \int x^4 dx + 5\int xdx - \int 1dx = \frac{x^5}{5} + \frac{5x^2}{2} - x + C$.
- $\int (sen(x) - 4cos(x))dx = -cos(x) - 4sen(x) + C$

Preparación para la integral definida: notación para sumas finitas

Sea la siguiente suma finita:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Utilizamos la notación sigma para representar la suma finita:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2.$$

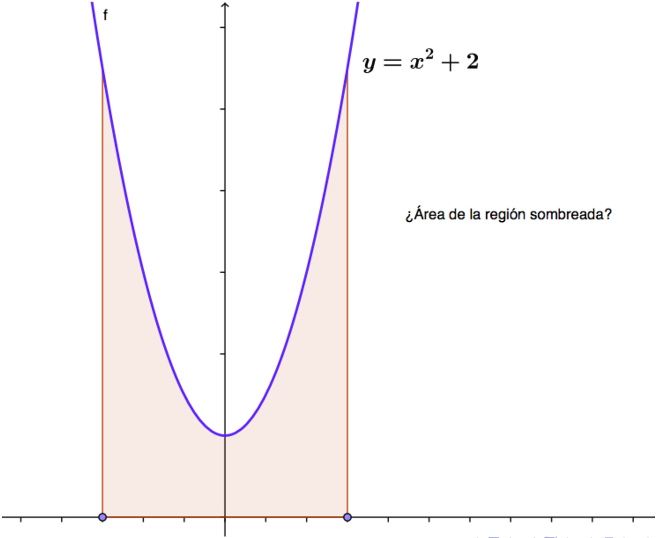
Finalmente, una fórmula útil es la siguiente:

$$\text{suma de los primeros } n \text{ números naturales } = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

INTEGRAL DEFINIDA

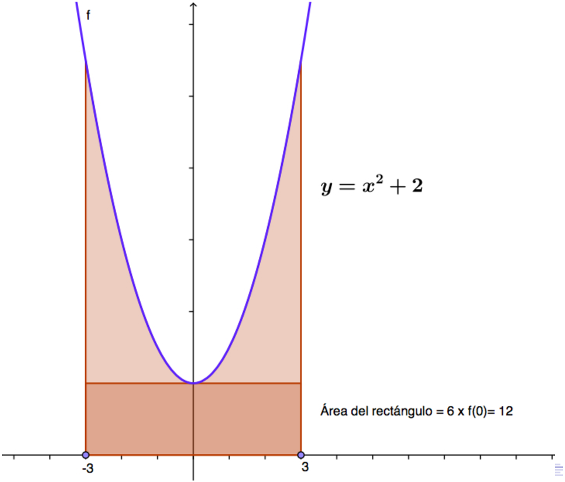
Motivación geométrica de la integral

Problema. Determine el área de la región sombreada:

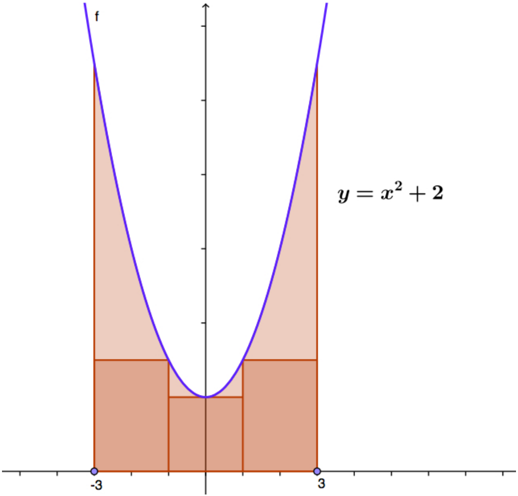


Motivación geométrica de la integral

Como primera aproximación, tomamos un rectángulo de base igual al intervalo considerado y altura igual al valor de la función en $x = 0$, en este caso $f(0) = 2$.

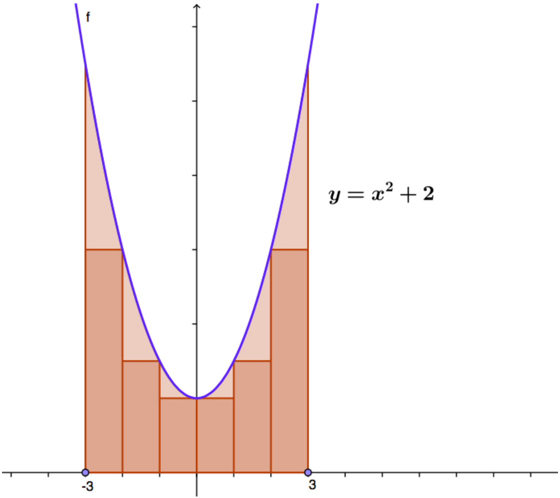


Una mejor aproximación se obtiene tomando más rectángulos:



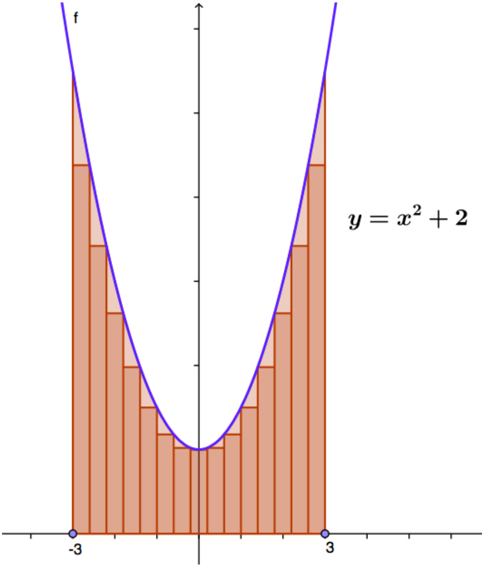
Observar que los rectángulos tienen la misma base y la altura de cada uno la da el valor de f en -1, 0 y 1. Por supuesto, se podrían haber elegido otros puntos. Suma de las áreas de rectángulos: 16.

En la siguiente figura se han tomado $n = 6$ rectángulos:



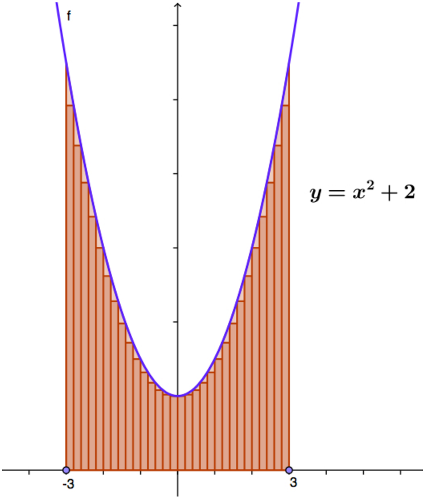
Observar que los rectángulos tienen la misma base y la altura de cada uno la da el valor de f en -2,-1, 0, 1 y 2. Por supuesto, se podrían haber elegido otros puntos.Suma de las áreas de rectángulos: 22.

En la siguiente figura se han tomado $n = 15$ rectángulos:



Suma de las áreas de rectángulos: 26.5.

En la siguiente figura se han tomado $n = 30$ rectángulos:



Suma de las áreas de rectángulos: 28.5. Se espera que a medida que se tomen **todos** los rectángulos cada vez más finos, la aproximación mejore. De hecho, el área buscada es 30.

En las próximas diapostivas vamos a formalizar el proceso de aproximación mediante rectángulos de una región **delimitada por el gráfico de una función** $f \geq 0$:

- Primero, formalizaremos el proceso de división de un intervalo en otros más pequeños (que constituyen las bases de los rectángulos) introduciendo el concepto de **Partición**.
- Luego, introduciremos una medida que nos dirá que tan finos son los rectángulo utilizados, definiendo la noción de **Norma de una partición**.
- Se formalizará la idea de sumas de áreas de rectángulos a través de la definición de **sumas de Riemann**.
- Finalmente, mediante un proceso de límite se obtendrá el área buscada a través del concepto de **Integral Definida**.

Noción de Partición

Partición de un intervalo: si $I = [a, b]$ es un intervalo, una partición P de I es una colección de puntos distintos: $x_0, x_1, ..., x_n,$ con la propiedad:

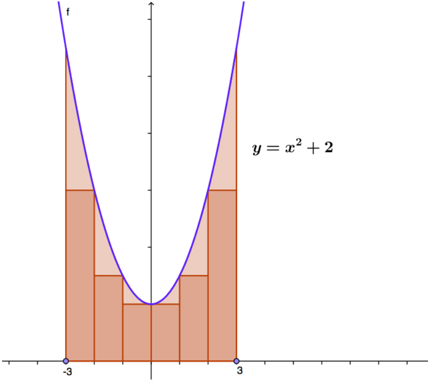
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Escribimos: $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$. Así, una partición P se utiliza para dividir un intervalo $[a, b]$ en subintervalos:

$$[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], ..., [x_{n-1}, b].$$

Noción de Partición: ejemplo

Por ejemplo en el gráfico:



hemos tomado la partición:

$$P = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

del intervalo $[-3, 3]$.

Noción de Norma de una Partición

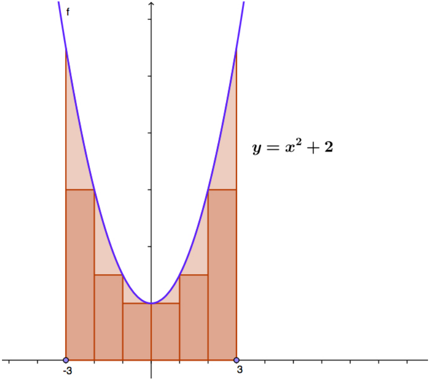
Norma de una partición: si $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una partición de I, entonces la norma de P es:

$$||P|| = \max\left\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., x_n - x_{n-1}\right\} = \max\left\{\Delta x_k : k = 1, ..., n\right\}$$

donde: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Noción de Norma de una Partición: ejemplo

Por ejemplo en el gráfico:



donde:

$$P = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

se tiene $||P|| = 1$.

Noción de Norma de una Partición: más ejemplos

Ejemplo: sea $I = [0, 1]$, entonces podemos formar las siguientes particiones:

$$P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \qquad ||P|| = 1/2.$$

$$P' = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}, \qquad ||P'|| = 1/2.$$

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}, \qquad ||P_n|| = 1/n.$$

Observación: en el último caso:

$$\lim_{n\to\infty} ||P_n|| = 0.$$

En la próxima diapositiva vamos a formalizar la idea de sumas de áreas de rectángulos.

Sumas de Riemann

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Tomemos:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$$

una partición del intervalo $[a, b]$. Seleccionamos puntos c_1, c_2, c_3, ..., c_n:

$$c_1 \in [x_0, x_1]$$

$$c_2 \in [x_1, x_2]$$

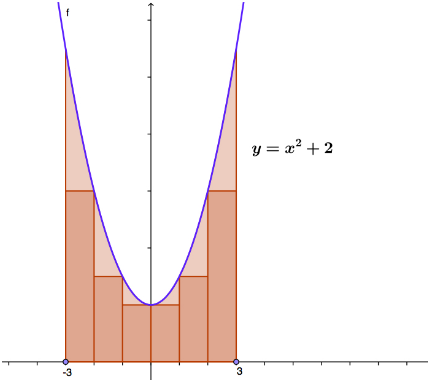
$$\vdots$$

$$c_n \in [x_{n-1}, x_n]$$

La suma:

$$S(f, P) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k,$$

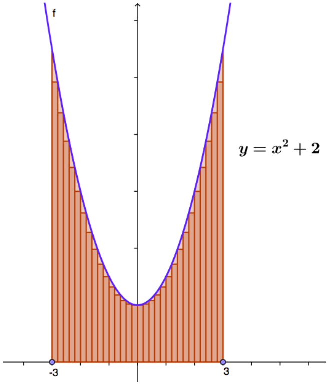
se denomina **suma de Riemann** de f en $[a, b]$ con respecto a P.



se tomaron: $c_1 = -2 \in [-3, -2]$, $c_2 = -1 \in [-2, -1]$, $c_3 = 0 \in [-1, 0]$, $c_4 = 0 \in [0, 1]$, $c_5 = 1 \in [1, 2]$ y $c_6 = 2 \in [2, 3]$. La suma $S(f, P)$ asociada es:

$$S(f, P) = f(-2).1 + f(-1).1 + f(0).1 + f(0).1 + f(1).1 + f(2).1$$

Se mencionó anteriormente que si se toman todos los rectángulos cada vez más finos se obtiene una mejor aproximáción a la región considerada. Por ejemplo:



Observar que lo que se busca es hacer que las longitudes de los subintervalos en los que se dividió el intervalo $[-3, 3]$ sean *simultáneamente* cada vez menores. La forma de lograr esto es haciendo que la norma de las particiones de $[-3, 3]$ tiendan a cero.

Así, se espera que el área A de la región considerada sea:

$$A = \lim_{||P|| \to 0} S(f, P).$$

Además, dicho límite recibirá un nombre especial.

Definición de integral definida

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Decimos que la función f es **integrable** en $[a, b]$ si el límite:

$$\lim_{||P|| \to 0} S(f, P) = A$$

existe. El número A se denomina integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ y escribimos:

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

En la próxima clase veremos ejemplos explícitos de aplicación de esta definición.

Cálculo de áreas para funciones no-negativas

Definición

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces el área de la región comprendida entre el gráfico de f, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x se define como:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ (\textbf{siempre que la integral exista})}.$$