Análisis Matemático I
Clase 15: Integral Definida: Teorema Fundamental del Cálculo.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2024

Recordar: una función f no negativa es integrable en $[a, b]$ si el límite

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(f, P)$$

existe y en ese caso escribimos

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(f, P) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Aquí,

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

es partición del intervalo $[a, b]$ y

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

es la suma de Riemann asociada a la partición P y a la elección de puntos $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, ..., n$.

Antes de calcular una integral respondamos el siguiente **interrogante:**
¿Qué debe satisfacer una función f para que sea integrable?

Integral definida

Antes de calcular una integral respondamos el siguiente **interrogante:**
¿Qué debe satisfacer una función f para que sea integrable?

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces:

- Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.
- Si f tiene una cantidad finita de discontinuidades en $[a, b]$ y estas discontinuidades son evitables o de salto, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Integral definida

Antes de calcular una integral respondamos el siguiente **interrogante:** ¿Qué debe satisfacer una función f para que sea integrable?

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces:

- Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.
- Si f tiene una cantidad finita de discontinuidades en $[a, b]$ y estas discontinuidades son evitables o de salto, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Observar:

$$f \text{ derivable} \;\Rightarrow\; f \text{ continua} \;\Rightarrow\; f \text{ integrable.}$$

Así, si una función f es continua en $[a, b]$, entonces sabemos que es integrable y por ende para calcular

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(f, P) = \int_a^b f(x)\, dx$$

podemos usar particiones específicas P que cumplan $\|P\| \to 0$. También podemos elegir los puntos c_k en las sumas de Riemann de la forma más apropiada posible.

En este curso, el estudiante resolverá integrales por definición solamente para funciones polinómicas simples en $[0, 1]$. Para ellos, usará las particiones

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}.$$

Integrales más complejas serán calculadas con otros métodos.

Integral Definida: ejemplo de cálculo de integrales mediante la definición

Ejemplo: calculemos

$$\int_0^1 2x dx.$$

La función $f(x) = 2x$ es continua en $[0, 1]$, luego es integrable. Para cada número natural n, tomemos la colección de particiones:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\},$$

y tomemos $c_1 = 0$, $c_2 = 1/n$, $c_3 = 2/n$,...,$c_k = (k-1)/n$,..., $c_n = (n-1)/n$. Entonces $||P_n|| = 1/n$, la cual tiende a cero cuando n tiende a infinito. Así:

$$\int_0^1 2x dx = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n).$$

Resta calcular $S(f, P_n)$ y hacer $n \to \infty$:

Integral Definida: ejemplo de cálculo de integrales mediante la definición

$$S(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2c_k = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}$$

$$= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{2}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} - n\right] = \frac{2}{n^2}\frac{n^2-n}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{n} \to 1, \qquad \text{(se usó que } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\text{)}$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto:

$$\int_0^1 2x dx = 1.$$

Integral Definida: ejemplo de cálculo de integrales mediante la definición

$$S(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2c_k = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}$$

$$= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{2}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} - n\right] = \frac{2}{n^2}\frac{n^2-n}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{n} \to 1, \qquad \text{(se usó que } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\text{)}$$

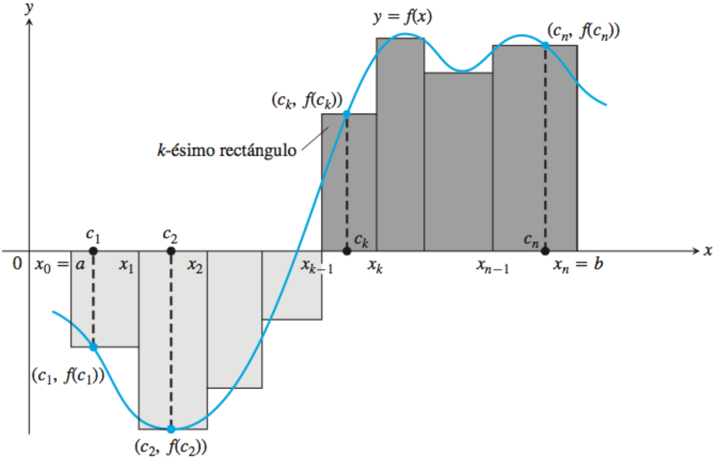
cuando $n \to \infty$. Por lo tanto:

$$\int_0^1 2x dx = 1.$$

Tarea para el alumno: tomar c_k como el extremo derecho de cada intervalo.

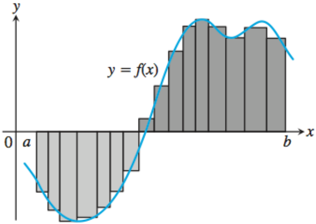
Extensión de la Integral definida a funciones con valores reales: sumas de Riemann

La idea de Sumas de Riemann puede aplicarse para aproximar regiones más generales:



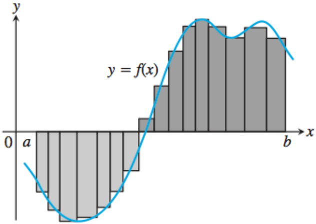
Extensión de la Integral definida a funciones con valores reales: Sumas de Riemann

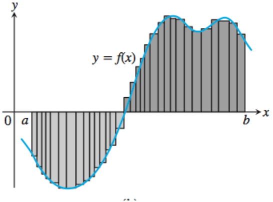
Al aumentar el número de puntos de la partición, se espera una mejor aproximación a la región considerada



Extensión de la Integral definida a funciones con valores reales: Sumas de Riemann

Al aumentar el número de puntos de la partición, se espera una mejor aproximación a la región considerada





Extensión de la Integral definida a funciones con valores reales: Sumas de Riemann

Comentarios importantes: sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces

- las sumas de Riemann asociadas a f pueden definirse como antes, pero si la función toma valores negativos, las sumas de Riemann ya no pueden considerarse como sumas de áreas de rectángulos pues algunos de sus términos podrían ser negativos. (Ver figuras de las diapositivas anteriores)
- La integral:

$$\int_a^b f(x)dx$$

puede definirse exactamente como antes, solo que ahora su valor no se puede interpretar como área de una región.

Propiedades de la integral definida

Propiedades

Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$, y sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_a^b 1dx = b - a$.
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$.
- Si $f(x) \leq g(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

- Si $c \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Teorema del Valor Medio para integrales

Teorema

Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que:

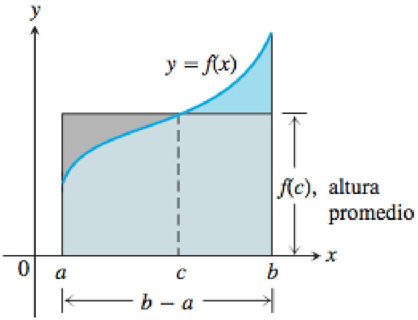
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Sin demostración.

Observación: la conclusión del teorema también se puede escribir como:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Interpretación geométrica para funciones no negativas:



Así, el Teorema del valor medio para integrales afirma que el área del rectángulo gris $f(c)(b-a)$ es igual al área de la región comprendida por el gráfico de f y el intervalo $[a, b]$:

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema fundamental del cálculo

Teorema Fundamental del cálculo: Primera Parte

Sea f una función continua en $[a, b]$. Sea:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

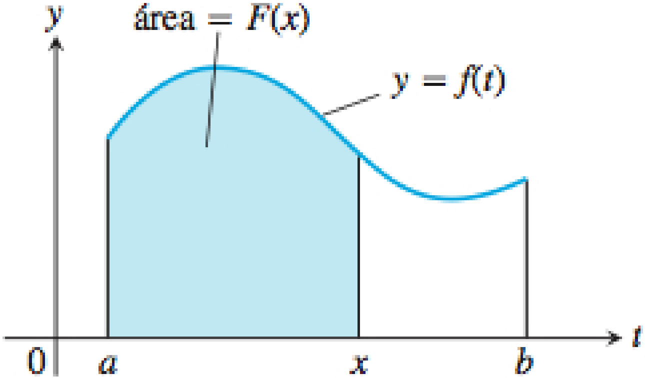
Entonces:

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Observación: F es una antiderivada de f. El teorema permite construir antiderivadas o primitivas de funciones continuas a través de la integración. La demostración será dada en la próxima clase.

Interpretación de la función F cuando $f \geq 0$.



Teorema fundamental del cálculo

Teorema fundamental del cálculo segunda parte

Sea f una función continua en $[a, b]$, y sea F una antiderivada de f en $[a, b]$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ejemplos. Calcule:

- $\int_0^\pi cos(x)dx = sen(\pi) - sen(0) = 0$
- $\int_0^2 (x^3 - x)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 = \frac{1}{4}16 - \frac{1}{2}4 - 0 = 2.$

La demostración del teorema será dada en la próxima clase.

Sólo para el turno mañana:

1. (T.P. 3. Ejercicio 9 a)) Obtener los puntos de inflexión de

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}.$$

2. (T.P. 3 Ejercicio 13) Un rectángulo tiene su base en el eje x y sus dos vértices superiores sobre la parábola $y = 12 - x^2$. Determine las dimensiones del rectángulo que tiene la mayor área y dé el valor de dicha área.