ÁLGEBRA (LCC)
UNIDAD 3 - DETERMINANTES

Licenciatura en Ciencias de la Computación
FING - UNCuyo

Conceptos

Toda matriz cuadrada puede ser asociada con un número real llamado su determinante.

DEFINICIÓN (DETERMINANTES)

1. El determinante de una matriz de orden 1 se define como el elemento de la matriz. Si $A = (a_{11})$, el determinante de A es a_{11} y se denota como
$$det(A) = |A| = a_{11}$$
2. El determinante de una matriz de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ se define como
$$det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

EJEMPLOS: DETERMINANTES

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ entonces
$$det(A) = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 = -10$$

Para definir el determinante de una matriz de orden mayor que 2, es conveniente que veamos una definición previamente.

DEFINICIÓN (Menor y Cofactor)

Sea A una matriz cuadrada, para cada elemento a_{ij} podemos definir

1. El menor M_{ij}, como el determinante de la matriz obtenida al suprimir la $i-$ésima fila y la $j-$ésima columna de A.
2. El cofactor C_{ij}, como

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

EJEMPLO

Calcular todos los menores y cofactores de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN (DETERMINANTE)

Sea A una matriz cuadrada de orden n, definimos el determinantes de A, denotado por $\det(A)$ o $|A|$, por

$$\det(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ij_0} C_{ij_0} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} M_{ij_0},$$

con $j_0 = 1, 2, \ldots, n$ fijo (estamos fijando una columna), o equivalentemente,

$$\det(A) := \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} C_{i_0 j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} M_{i_0 j},$$

con $i_0 = 1, 2, \ldots, n$ fijo (estamos fijando una fila).

EJEMPLOS: DETERMINANTES

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si elegimos la primera columna para calcular el determinantes, obtenemos

$$det(A) = 0C_{11} + 3C_{21} + 4C_{31} = 14$$

   Calcular el determinante utilizando otra columna o fila.

2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ entonces $det(B) = -1$

3. $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $det(C) = -18$

Para evaluar el determinante de matrices de orden 3, se puede utilizar el método de Sarrus.

EJEMPLO: Método de Sarrus

Calcular el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TEOREMA

Sea A una matriz cuadrada.

1. Si A tiene una fila o una columna de ceros, entonces $\det(A) = 0$.
2. $\det(A) = \det(A^T)$.
3. Si A una matriz triangular, entonces $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$

Demostración

PROPIEDADES (ASOCIADAS CON LAS OPERACIONES ELEMENTALES

Sean A y B matrices cuadradas de orden n.

1. Si B es obtenida a partir de A al intercambiar dos filas, entonces
$$det(B) = -det(A)$$
2. Si B es obtenida a partir de A al multiplicar una fila de A por una constante c diferente de cero, entonces
$$det(B) = c \cdot det(A)$$
3. Si B es obtenida a partir de A al sumar a una fila un múltiplo de otra fila, entonces
$$det(B) = det(A)$$

Como del determinante se puede sacar un factor común de cualquier fila de una matriz, y como cada uno de los n renglones de kA tienen un factor común igual a k, se obtiene

TEOREMA

Sea A una matriz cuadrada de orden n, entonces $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$.

EJEMPLO

Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 10 & -20 & 40 \\ 30 & 0 & 50 \\ -20 & -30 & 10 \end{pmatrix}$

TEOREMA

Sea A y B son dos matrices cuadrada de orden n, entonces

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

TEOREMA

Una matriz cuadrada A es inversible si, y sólo si,

$$\det(A) \neq 0$$

Demostración

TEOREMA

Si una matriz cuadrada A es inversible entonces

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Demostración

Equivalencias

Sea A una matriz cuadrada de orden n, entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. A es inversible.
2. $Ax = b$ tiene una única solución para toda matriz columna b de $n \times 1$.
3. $Ax = 0$ tiene sólo la solución trivial.
4. A es equivalente por renglones a A.
5. A puede ser escrita como el producto de matrices elementales.
6. $\det(A) \neq 0$

Utilizando los cofactores C_{ij} de la matriz A, vamos a definir

DEFINICIÓN (ADJUNTA)

1. Sea A una matriz de orden n se define como matriz de cofactores de A a la matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

2. La transpuesta de la matriz de cofactores se define como adjunta de A y se denota $adj(A)$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO: ADJUNTA

La adjunta de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ es

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Veamos una aplicación de la matriz adjunta.

TEOREMA

Sea A una matriz inversible de orden n, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

EJEMPLO: INVERSA

Utilizando la adjunta de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ resulta

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Aprenderemos ahora la regla de Cramer. Es una fórmula que utiliza determinantes para resolver un SEL cuadrado que tienen única solución.

Regla de Cramer

Si un SEL $Ax = b$ con n ecuaciones lineales y n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que $\det(A) \neq 0$, entonces la solución del SEL está dada por

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots,\ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

donde A_i es la matriz que se obtiene al sustituir los elementos de la $i-$ésima columna de A por los elementos de la matriz b.

EJEMPLO: Regla de Cramer

Aplicando la regla de Cramer la solución del SEL

$$\begin{cases} x_1 & & & + & 2x_3 = & 6 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 = & 30 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 = & 8 \end{cases}$$

es

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$