Álgebra Lineal - UNCuyo - 2024

Trabajo Práctico 3- Parte 2

Determinantes

1. Encuentre el determinante de las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -7 & \frac{1}{2} \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ -0,3 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ -8 & 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. Encuentre los valores de λ para los cuales el determinante de las siguientes matrices es cero.

a) $\begin{pmatrix} \lambda+2 & 2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{pmatrix}$

3. Resolver para x

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

4. Encuentre por inspección el determinante de las matrices elementales.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Utilice operaciones elementales para evaluar el determinante de las siguientes matrices.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

6. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$ encontrar:

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

7. Para las siguientes matrices

   1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
   2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   encuentre

   a) $|A|$ *b*) $|B|$ *c*) $A+B$

   d) $|A+B|$. Luego verifique que $|A|+|B| \neq |A+B|$.

   e) AB

   f) $|AB|$. Luego verifique que $|A||B| = |AB|$. ¿Bajo que hipótesis sucede esto en general?

   g) $|A^T|$ *h*) $|A^2|$ *i*) $|AA^T|$ *j*) $|2A|$ *k*) $|A^{-1}|$

8. Sean A y B matrices cuadradas de orden 4 tales que $\det(A) = -5$ y $\det(B) = 3$. Encuentre,

   a) $|AB|$ *b*) $|A^3|$ *c*) $|3B|$ *d*) $|(AB)^T|$ *e*) $|A^{-1}|$

9. Sean A y B matrices cuadradas de orden 3 tales que $\det(A) = 10$ y $\det(B) = 12$. Encuentre,

   a) $|AB|$ *b*) $|A^4|$ *c*) $|2B|$ *d*) $|(AB)^T|$ *e*) $|A^{-1}|$

10. Decida qué matriz es singular o no singular.

    a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

11. Use determinantes para decidir cuál SEL tiene única solución.

    a) $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x - y + z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - y + z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

12. Encuentre el valor(es) de k para los cuales A es singular.

    a) $\begin{pmatrix} k-1 & 3 \\ 2 & k-2 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & k \end{pmatrix}$

13. Encuentre la adjunta de A. Luego, utilícela para encontrar la inversa de A si es posible.

    a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

    b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -12 \end{pmatrix}$

    c) $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -7 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

    d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

14. Utilice la regla de Cramer para resolver, si es posible, los siguientes SEL.

$a)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ $\qquad b)\ \begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$

Para pensar más

15. Demostrar que el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta - \cos\theta & \sin\theta + \cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

no depende de θ.

16. Sean A y B matrices de orden n. Demostrar que si A es inversible, entonces $\det(A) = \det(A^{-1}BA)$.

17. (*) Demuestre, utilizando cofactores, que si A es una matriz cuadrada, entonces $\det(A) = \det(A^T)$.

    Ayuda: Utilice inducción matemática sobre el orden de la matriz. Primero, si A es una matriz de orden 1. Luego, considere como *hipótesis inductiva* que $\det(A) = \det(A^T)$ para matrices de orden $n-1$. Escriba el determinante de A por expansión del primer renglón y el determinante de A por expansión de la primera columna. Compare los resultados y utilice *HI* para concluir que son iguales.

18. Sea A una matriz de orden n, diferente de cero, que cumple $A^{10} = 0$. Explique por qué A es singular. Indique las propiedades que uitliza para responder.

19. *a*) Demuestre que si A es una matriz antisimétrica de orden n, entonces $\det(A) = (-1)^n \det(A)$.

    b) Demuestre que si A es una matriz antisimétrica de orden n impar, entonces $\det(A) = 0$.

20. Demuestre que si A es una matriz no singular de orden $n\,(n \geqslant 3)$, entonces $\det(Adj(A)) = \det(A)^{n-1}$.