Álgebra Lineal - UNCuyo - 2024

Trabajo Práctico 4

1. Determine las coordenadas de x

   a) $B = \{(2,-1),(0,1)\}$, $[x]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

   b) $B = \{(-1,4),(4,-1)\}$, $[x]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

   c) $B = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$, $[x]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

   d) $B = \{1, x, x^2\}$, $[x]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   e) $B = \{3, 1+x, 2+x-x^2,\}$, $[x]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Determine el vector de coordenadas de v en la base B.

   a) $B = \{(4,0),(0,4)\}$, $v = (12,5)$

   b) $B = \{(-6,7),(4,-3)\}$, $v = (-26,32)$

   c) $B = \{(8,11,0),(7,0,10),(1,4,6)\}$, $v = (3,19,2)$

   d) $B = \{1, x, x^2\}$, $v = 2x - x^2$

   e) $B = \{3, 1+x, 2+x-x^2,\}$, $v = 1 + 6x - x^2$

3. Para cada transformación lineal, encuentre la imagen de v y la preimagen de w.

   a) $T(v_1, v_2) = (v_1 + v_2, v_1 - v_2),\ v = (3,-4),\ w = (3,19)$

   b) $T(v_1, v_2, v_3) = (v_2 - v_1, v_1 + v_2, 2v_1),\ v = (2,3,0),\ w = (-11,-1,10)$

4. Determine si la función dada es una transformación lineal.

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x,y) = (1,x)$

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x,y) = (x, 2y - x)$

   c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x,y) = (xy, 3x + y)$

   d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x,y,z) = (x+y, x-y, z)$

   e) $T : M_{2,2} \to \mathbb{R}, T(A) = |A|$

   f) $T : M_{3,3} \to M_{3,3}, T(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$

   g) $T : P_2 \to P_2, T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + 2a_2 x$

5. La transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está definida por $T(1,1) = (1,0)$ y $T(1,-1) = (0,1)$. Encuentre

   a) $T(0,2)$

   b) $T(x,y)$

6. La transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ está definida por $T(1,0,0) = (2,4,-1), T(0,1,0) = (1,3,-2)$ y $T(0,0,1) = (0,-2,2)$. Encuentre

   a) $T(0,3,-1)$

   b) $T(x,y,z)$

7. La transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ está definida por $T(1,1,1) = (2,0,-1), T(0,-1,2) = (-3,2,-1)$ y $T(1,0,1) = (1,1,0)$. Encuentre

   a) $T(2,1,0)$

   b) $T(x,y,z)$

8. Para cada transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $T(v) = Av$, determine n y m. Además, halle la imagen pedida.

   a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $T(1,0,2,3)$

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $T(2,4)$

   c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $T(1,0,-1,3,0)$

9. Para cada transformación lineal determine (i) $\mathrm{Ker}(T)$, (ii) $\mathrm{nul}(T)$, (iii) $\mathrm{Im}(T)$ y (iv) $\mathrm{rg}(T)$.

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x,y,z) = (0,0,0)$

   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x,y,z) = (x,0,z)$

   c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x,y) = (x+2y, y-x)$

   d) $T : P_3 \to \mathbb{R}, T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0$

   e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x) = Ax$ con $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T(x) = Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

   g) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(x) = Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

   h) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la reflexión con respecto al plano de coordenadas yz. Es decir, $T(x,y,z) = (-x,y,z)$

10. Encuentre la matriz estándar A asociada a la transformación lineal. Utilice A para hallar el transformado de v.

    a) $T(x,y,z) = (0,0,0),\ v = (1,-2,1)$

    b) $T(x,y) = (x+2y, x-2y),\ v = (1,-1)$

    c) $T(x,y,z) = (x+y, y-x, z+x),\ v = (1,1,-1)$

    d) T es la reflexión a través del origen en $\mathbb{R}^2$, es decir, $T(x,y) = (-x,-y))$ $v = (3,-2)$

    e) T es la reflexión de la recta $y = x$ en $\mathbb{R}^2$, $v = (4,4)$

11. Encuentre la matriz M de la transformación lineal respecto a las bases B y B'. Luego, utilícela para hallar $T(v)$.

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T(x, y) = (x + y, x, y)$,
   $B = \{(1, -1), (0, 1)\}, B' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}, v = (5, 4)$

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T(x, y) = (x - y, 0, x + y)$,
   $B = \{(1, 2), (1, 1)\}, B' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}, v = (-3, 2)$

   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (x - y, y - z)$,
   $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}, B' = \{(1, 2), (1, 1)\}, v = (1, 2, -3)$

   d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (2x - z, y - 2x)$,
   $B = \{(2, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 2, 1)\}, B' = \{(1, 1), (2, 0)\}, v = (0, -5, 7)$

12. Sean $B = \{(-2, -2), (1, 3)\}$ y $B' = \{(-12, 0), (-4, 4)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   la matriz de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con respecto a B.

   a) Determine la matriz de transición P de B' a B.

   b) Halle P^{-1}

   c) Utilice P para encontrar $[v]_B$ siendo $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

   d) Utilice el inciso anterior y A para encontrar $[T(v)]_B$

   e) Utilice P^{-1} y el inciso anterior para encontrar $[T(v)]_{B'}$

   f) Encuentre la matriz A' de la transformación lineal respecto a la base B'.

   g) Encuentre $[T(v)]_{B'}$ uitlizando A'.

13. Sean $B = \{(1, 1), (-2, 3)\}$ y $B' = \{(1, -1), (0, 1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   la matriz de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con respecto a B.

   a) Determine la matriz de transición P de B' a B.

   b) Halle P^{-1}

   c) Utilice P para encontrar $[v]_B$ siendo $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

   d) Utilice el inciso anterior y A para encontrar $[T(v)]_B$

   e) Utilice P^{-1} y el inciso anterior para encontrar $[T(v)]_{B'}$

   f) Encuentre la matriz A' de la transformación lineal respecto a la base B'.

   g) Encuentre $[T(v)]_{B'}$ uitlizando A'.

14. Para cada transformación lineal del ejercicio 10 , (i) Encuentre la matriz A' de la transformación lineal respecto a la base B' y (ii) muestre que A' es semejante a la la matriz estándar A de T encontrada en 10.

    a) $T(x, y, z) = (0, 0, 0), B' = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$
    b) $T(x, y) = (x + 2y, x - 2y), B' = \{(1, 3), (2, 0)\}$
    c) $T(x, y, z) = (x + y, y - x, z + x), B' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
    d) $T(x, y) = (-x, -y))B' = \{(0, 1), (1, 3)\}$

15. Demuestre que si A y B son semejantes, entonces $\det(A) = \det(B)$. Indique si es correcta, o no, la implicación recíproca.

16. Sean A y B matrices semejantes. Demuestre que

    a) A^T y B^T son matrices semejantes.
    b) Si A es no singular, entonces B es no singular y A^{-1} y B^{-1} son matrices semejantes.
    c) A^2 y B^2 son matrices semejantes.
    d) $(*)$ A^k y B^k son matrices semejantes, para cualquier k natural.