Análisis Matemático I
Clase 19: Aplicaciones de la integral al cálculo de volúmenes, áreas y longitudes

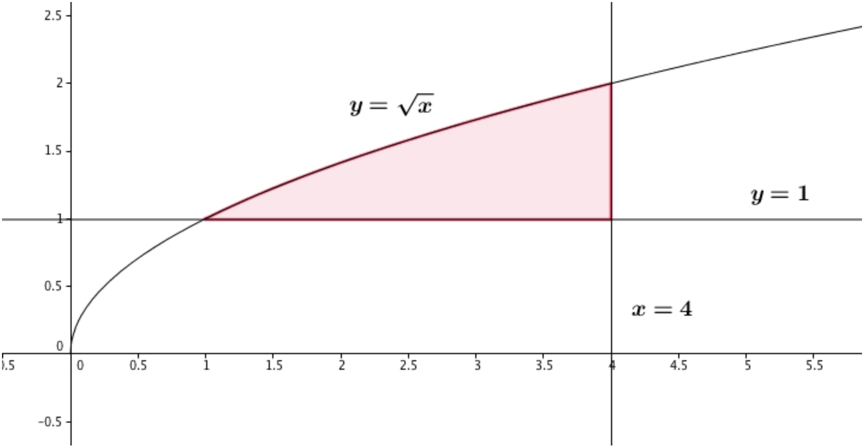
Pablo D. Ochoa

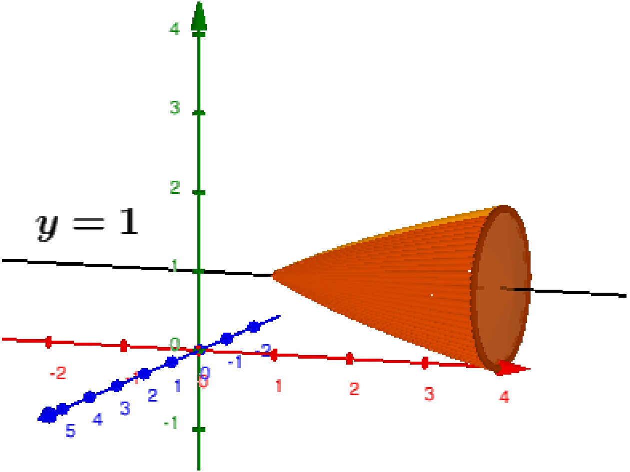
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2024

Ejemplo 3: determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región encerrada por la gráfica de $y = \sqrt{x}$ y las rectas $y = 1$, $x = 4$ alrededor de la recta $y = 1$.

Ejemplo 3: determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región encerrada por la gráfica de $y = \sqrt{x}$ y las rectas $y = 1$, $x = 4$ alrededor de la recta $y = 1$.





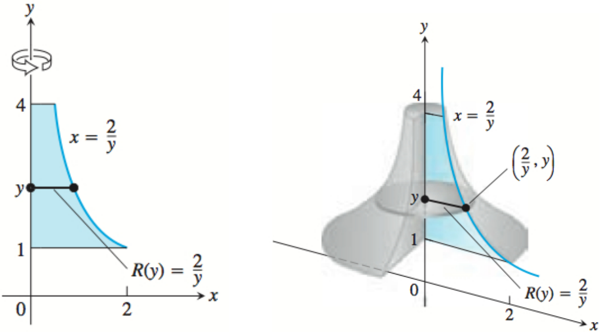
Así, el volumen viene dado por:

$$V = \int_1^4 \pi(\sqrt{x} - 1)^2 dx = \frac{7\pi}{6}.$$

Sólido de revolución: método de discos

Ejemplo 4: determine el volumen el sólido que se obtiene al hacer girar la región comprendida entre el gráfico de $x = 2/y$, el eje y y las rectas $y = 1$, $y = 4$ alrededor del eje y.

Ejemplo 4: determine el volumen el sólido que se obtiene al hacer girar la región comprendida entre el gráfico de $x = 2/y$, el eje y y las rectas $y = 1$, $y = 4$ alrededor del eje y.

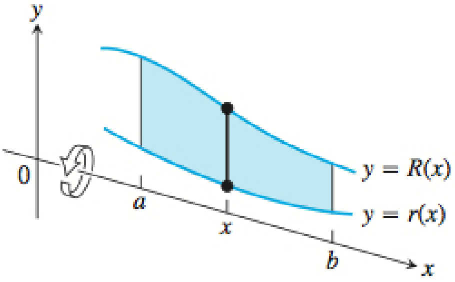


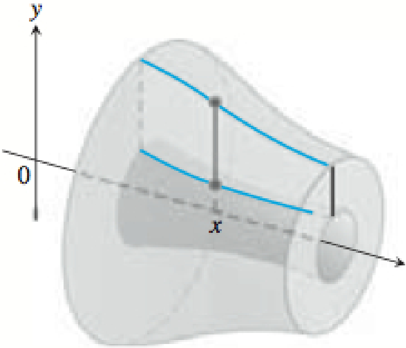
En este caso:

$$V = \int_1^4 \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy = 3\pi.$$

Método de las arandelas o anillos

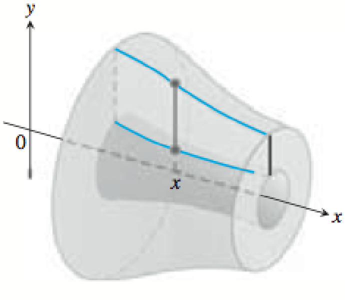
En ocasiones, al hacer girar una región alrededor de un eje, es posible que nos quede un sólido con una cavidad:





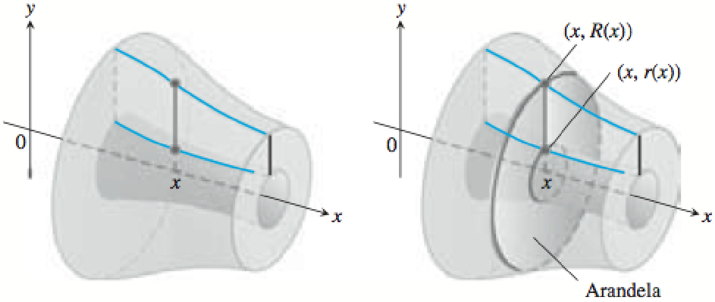
Método de las arandelas

Las secciones transversales perpendiculares al eje de revolución no son discos como antes, sino **arandelas** o anillos.



Método de las arandelas

Las secciones transversales perpendiculares al eje de revolución no son discos como antes, sino **arandelas** o anillos.



Observar que tenemos un radio mayor $R(x)$ y uno menor $r(x)$. El área $A(x)$ de las secciones transversales es:

$$A(x) = \pi R(x)^2 - \pi r(x)^2.$$

Método de las arandelas

Por lo tanto, el volumen del sólido viene dado por:

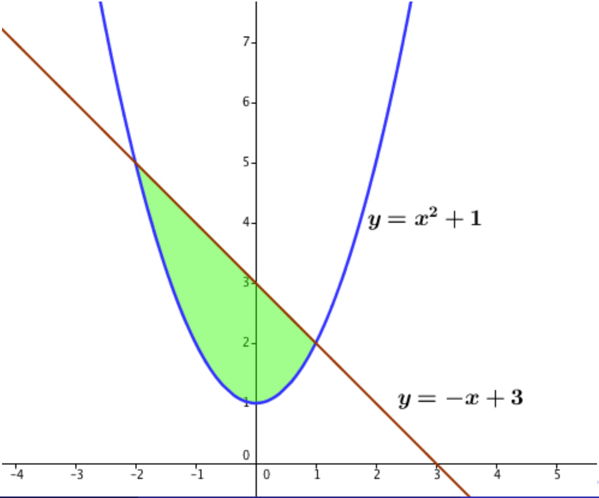
Volumen de un sólido de revolución por el método de arandelas (alrededor del eje x)

$$V = \int_a^b \pi \left[R(x)^2 - r(x)^2\right] dx.$$

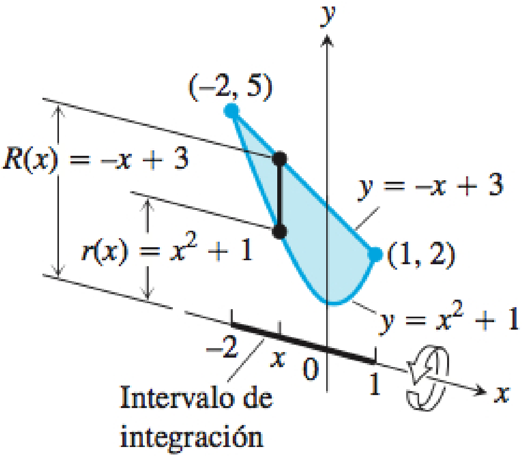
Ejemplo 5: considere la región plana encerrada por las curvas $y = x^2 + 1$ y $y = -x + 3$. Determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar dicha región alrededor del eje x.

Sólido de revolución: método de las arandelas

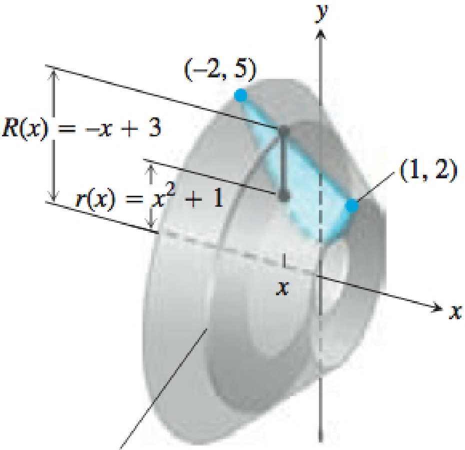
Ejemplo 5: considere la región plana encerrada por las curvas $y = x^2 + 1$ y $y = -x + 3$. Determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar dicha región alrededor del eje x.



Método de las arandelas



Sólido de revolución: método de las arandelas



Luego:

$$V = \int_{-2}^{1} \pi[(-x+3)^2 - (x^2+1)^2]dx = \frac{117\pi}{5}.$$

Sólido de revolución: método de las arandelas

Para determinar el volumen de un sólido con cavidad formado al hacer girar una región alrededor del eje y, utilizamos la misma expresión de antes para el cálculo de volumen por arandelas pero integramos con respecto a y:

Volumen de un sólido de revolución por el método de arandelas (alrededor del eje y)

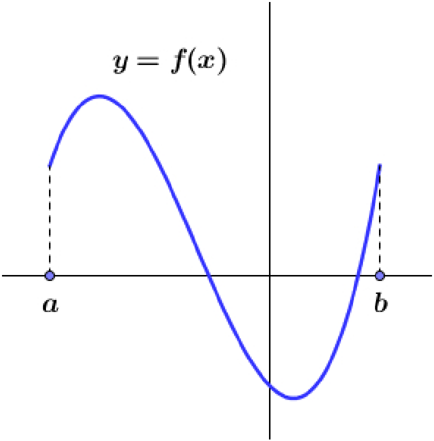
$$V = \int_c^d \pi \left[R(y)^2 - r(y)^2 \right] dy$$

donde $R = R(y)$ es el radio mayor, $r = r(y)$ el radio menor y $[c, d]$ es el intervalo de integración en y.

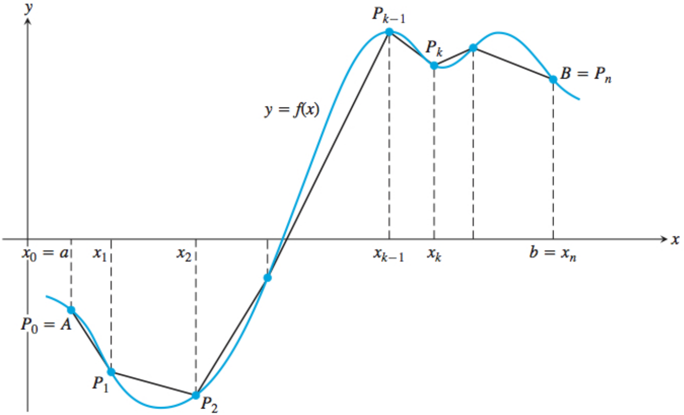
En la práctica hará ejercicios empleando la expresión anterior.

Longitud de una curva

Problema: determine la longitud de la curva dada por una función $y = f(x)$ con derivada continua en el intervalo $[a, b]$.

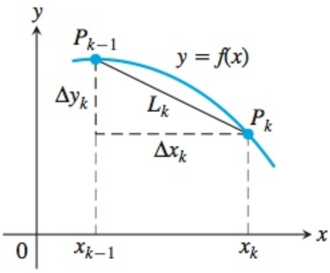


Solución: tomamos una partición $P = \{x_0, ..., x_n\}$ del intervalo $[a, b]$. Consideramos los segmentos que unen: $(x_0, f(x_0))$ con $(x_1, f(x_1))$, $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$, ..., $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ con $(x_n, f(x_n))$.



Longitud de una curva

Observar que la longitud del arco de la curva que va desde $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ a $(x_k, f(x_k))$ se puede aproximar con la longitud del segmento rectilíneo que une dichos puntos:



Entonces si L_k es la longitud del segmento, tenemos:

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

Longitud de una curva

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

Por el teorema del valor medio, existe $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que:

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)(x_k - x_{k-1}) = f'(c_k)\Delta x_k.$$

Reemplazando en la expresión para L_k obtenemos:

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + f'(c_k)^2(\Delta x_k)^2} = \sqrt{1 + f'(c_k)^2}\Delta x_k$$

Si sumamos las longitudes de los segmentos, ontendremos una aproximación de la longitud de la curva L. Luego:

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_k)^2}\Delta x_k$$

Longitud de una curva

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_k)^2} \Delta x_k$$

Cuando $\|P\|$ tiende a cero, obtenemos (ya que $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ es continua en $[a, b]$):

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Así:

Longitud de curva

Sea $y = f(x)$ una función tal que f' es continua en $[a, b]$. Entonces la longitud de la curva $y = f(x)$ desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Ejercicios de repaso, sólo turno tarde

Dada la función
$$f(x) = \frac{x^2 - 49}{x^2 + 5x - 14}.$$
Determine los intervalos de crecimiento y /o decrecimiento de f y los extremos locales (si existieran). Además, encuentre los intervalos de concavidad y verifique si existe algún punto de inflexión.
Sugerencia: factorice y simplifique pero no olvide el dominio de f.

Problema: un sólido se forma juntando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. El volumen total del sólido es de 14 cm^3. Encontrar el radio del cilindro que hace el área superficial mínima. Recordar que el área de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

Ejercicio adjunto.

Problema: determinar el área encerrada entre las curvas $y = x$ y $y = x(4 - x^2)^{1/2}$.