ÁLGEBRA (LCC)

UNIDAD 4 - TRANSFORMACIONES LINEALES

Licenciatura en Ciencias de la Computación
FING - UNCuyo

UNIDAD 4 - TRANSFORMACIONES LINEALES.

4.A Definición y propiedades de una transformación lineal. Breve introducción a los espacios vectoriales abstractos: conjunto generador, independencia lineal, base y dimensión. Vector de coordenadas. Subespacio. Definición de transformaciones lineales. Ejemplos, transformaciones especiales: transformación nula, transformación identidad, transformación matricial. Propiedades de las transformaciones lineales.

4.B Núcleo e imagen de una transformación lineal. Núcleo e imagen de una transformación lineal: definición y propiedades. Rango y nulidad de una transformación lineal. Teorema de la dimensión.

4.C Matriz asociada a una transformación lineal. Definición de matriz asociada estándar. Teorema general de transformación lineal matricial en bases cualesquiera. Matriz de pasaje o de transición o de cambio de base. Matrices semejantes. Propiedades.

Recordemos.

EJEMPLOS

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$

$$B = \{(1,2),(3,1)\}$$

es LI y genera a $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLOS

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$

$$B = \{(1,0),(0,1)\}$$

es LI y genera a $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

es LI y genera a $\mathbb{R}^3$.

Recordemos.

EJEMPLOS

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$

$$B = \{(1,2),(3,1)\}$$

es LI y genera a $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLOS

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$

$$B = \{(1,0),(0,1)\}$$

es LI y genera a $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

es LI y genera a $\mathbb{R}^3$.

Recordemos.

EJEMPLOS

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$

$$B = \{(1,2),(3,1)\}$$

es LI y genera a $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLOS

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$

$$B = \{(1,0),(0,1)\}$$

es LI y genera a $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

es LI y genera a $\mathbb{R}^3$.

Definición (Base)

Un conjunto de vectores $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ se llama base de $\mathbb{V}$ si cumple

1. B genera a $\mathbb{V}$.
2. B es LI.

Observación: Trabajaremos con espacios vectoriales que tienen una cantidad finita de vectores en la base. Estos espacios se llaman *Espacios vectoriales de dimensión finita.*

Ejemplos

1. El conjunto $B = \{(1,2),(3,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es una base de $\mathbb{R}^2$.
2. El conjunto $B = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es una base de $\mathbb{R}^2$.
3. El conjunto $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

- Las bases de los ejemplos 2 y 3 se denominan *base canónica o base estándar* de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.
- Este resultado puede generalizarse a los espacios vectoriales $n-$dimensionales.

Definición (Base canónica)

Los vectores

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

forman una base denominada *base canónica o base estándar* de $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLOS DE BASES CANÓNICAS

1. El conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   es la base canónica para las matrices de orden 2, $M_{2,2}$.

2. La base canónica para las matrices de tamaño $m \times n$, $M_{m,n}$, es el conjunto de las distintas matrices de tamaño $m \times n$ que tienen sólo un 1 y todos los demás elementos igual a 0.
3. El conjunto $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ es la base canónica para el EV formado por los polinomios de grado 3, P_3.
4. El conjunto $B = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ es la base canónica para el EV formado por los polinomios de grado n, P_n.

TEOREMA

Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de un EV $\mathbb{V}$, entonces todo vector en $\mathbb{V}$ puede escribirse de una y sólo de una forma como CL de vectores de S.

TEOREMA

- Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de un EV $\mathbb{V}$, entonces todo conjunto que contiene más de n vectores en $\mathbb{V}$ es LD.
- Si un EV tiene una base con n vectores, entonces toda base de $\mathbb{V}$ tiene n vectores.

Definición (Dimensión)

Sea $\mathbb{V}$ un EV que tiene una base con n vectores, el número n se denomina dimensión de $\mathbb{V}$ y se denota como

$$dim(\mathbb{V}) = n$$

Si $\mathbb{V} = \{0\}$, entonces $dim(\mathbb{V}) = 0$.

EJEMPLOS de dimensión

1. La dimensión de $\mathbb{R}^n$ con las operaciones estándar es n.
2. La dimensión de P_n con las operaciones estándar es $n+1$.
3. La dimensión de $M_{m,n}$ con las operaciones estándar es mn.

Definición (Vector de coordenadas)

Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de un EV $\mathbb{V}$ y sea x un vector de $\mathbb{V}$ tal que

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$$

Los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ se denominan coordenadas de x con respecto a la base $\mathbb{V}$.
El vector de coordenadas con respecto a $\mathbb{V}$ es la matriz columna en $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes son las coordenadas de x. Es decir,

$$[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

EJEMPLO

Determinemos la matriz de coordenadas de $x = (2, 1, 3)$ en $\mathbb{R}^3$ con respecto a la base canónica.
Como

$$x = (2, 1, 3) = 2(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$$

el vector de coordenadas de x respecto a la base canónica es simplemente

$$[x]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO

Con respecto a la base $B = \{(1,0),(1,2)\}$ sabemos que

$$[x]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hallemos las coordenadas de x con respecto a la base canónica.
Sabemos que

$$x = 3(1,0) + 2(1,2) = (5,4)$$

Es fácil notar que,

$$(5,4) = 5(1,0) + 4(0,1)$$

Así, el vector de coordenadas de x respecto a la base canónica es

$$[x]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Transformaciones lineales

Definición (Transformación lineal)

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales. La función

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

se llama transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ si para todo u y v en $\mathbb{V}$ y para cualquier escalar c se cumplen las propiedades

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
2. $T(cu) = cT(u)$.

Se dice que una transformación lineal *conserva operaciones* porque se obtiene el mismo resultado si las operaciones de suma y multiplicación escalar se efectúan antes o después de que se aplique la transformación lineal.

EJEMPLO

Verificar que $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y)=(x-y,x+2y)$ es una TL.

Solución Sean $u=(u_1,u_2)$ y $v=(v_1,v_2)$.

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T((u_1,u_2)+(v_1,v_2)) = T((u_1+v_1,u_2+v_2)) \\
&= ((u_1+v_1)-(u_2+v_2),(u_1+v_1)+2(u_2+v_2)) \\
&= (u_1-u_2+v_1-v_2\ ,\ u_1+2u_2+v_1+2v_2) \\
&= (u_1-u_2\ ,\ u_1+2u_2)+(v_1-v_2\ ,\ v_1+2v_2) \\
&= T(u_1,u_2)+T(v_1,v_2) \\
&= T(u)+T(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(cu) &= T(c(u_1,u_2)) = T((cu_1,cu_2)) \\
&= (cu_1-cu_2\ ,\ cu_1+2cu_2) \\
&= (c(u_1-u_2)\ ,\ c(u_1+2u_2)) \\
&= c(u_1-u_2\ ,\ u_1+2u_2) \\
&= cT(u_1,u_2) \\
&= cT(u)
\end{aligned}$$

Como ambas propiedades se cumplen, T es TL.

Algunas TL especiales

1. $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ dada por
$$T(v) = 0$$
es la transformación cero.
2. $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ dada por $T(v) = v$ es la transformación identidad y la denotaremos como
$$Id(v) = v$$
3. Para una matriz A de tamaño $m \times n$, la TL $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por
$$T(v) = Av$$
es la transformación matricial definida por la matriz A.

EJEMPLO

Para $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(v) = Av = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Hallar $T(2, -1)$ y verificar que es una TL.

EJEMPLO

Sea $T : M_{3,2} \longrightarrow M_{2,3}$ la TL que transforma una matriz A de tamaño 3×2 en su transpuesta. Es decir, $T(A) = A^T$.

Verificar que T es una TL.

Propiedades

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ EV, $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una TL y $u, v \in \mathbb{V}$. Entonces, valen las siguientes propiedades

1. $T(0) = 0$
2. $T(-v) = -T(v)$
3. $T(u - v) = T(u) - T(v)$
4. Si $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$, entonces

$$T(v) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \ldots + c_n T(v_n)$$

Demostración

Veamos en el siguiente ejemplo, cómo trabajar con la TL si está definida sólo en una base.

EJEMPLO

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,0,0) = (2,-1,4)$$

$$T(0,1,0) = (1,5,-2)$$

$$T(0,0,1) = (0,3,1)$$

Hallar $T(2,3,-2)$ y $T(x,y,z)$.
Solución Como $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, podemos escribir (de manera única)

$$(2,3,-2) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) - 2(0,0,1)$$

Aplicando la transformación en ambos miembros y utilizando la definición de TL, resulta que

$$\begin{aligned} T(2,3,-2) &= T(2(1,0,0) + 3(0,1,0) - 2(0,0,1)) \\ &= 2T(1,0,0) + 3T(0,1,0) - 2T(0,0,1) \\ &= 2(2,-1,4) + 3(1,5,-2) - 2(0,3,1) = (7,7,0) \end{aligned}$$

EJEMPLO(continuación

De igual manera,

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= T(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\ &= xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) \\ &= x(2, -1, 4) + y(1, 5, -2) + z(0, 3, 1) \\ &= (2x + y, -x + 5y + 3z, 4x - 2y + z) \end{aligned}$$

Así, la TL está definidad como

$$T(x, y, z) = (2x + y, -x + 5y + 3z, 4x - 2y + z)$$

DEFINICIÓN (NÚCLEO)

Sea $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces, el conjunto de todos los vectores en $\mathbb{V}$ que cumplen $T(v) = 0$ se denomina *núcleo* (o *kernel*) de T y se denota por $\text{Ker}(T)$. En otras palabras

$$\text{Ker}(T) = \{v \in \mathbb{V} : T(v) = 0\}.$$

EJEMPLO

Sea $T : M_{3,2} \longrightarrow M_{2,3}$ la transformación lineal que transforma una matriz A de tamaño 3×2 en su transpuesta. Es decir, $T(A) = A^T$. Encuentre el kernel de T.

Solución

Para esta transformación lineal, es evidente que la matriz nula de tamaño 3×2 es la única matriz en $M_{3,2}$ cuya transpuesta es la matriz cero en $M_{2,3}$. Por consiguiente, el kernel de T consta de un solo elemento: la matriz cero en $M_{3,2}$. En otras palabras

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

El kernel de las Transformaciones Nula e Identidad

- El kernel de la Transformación Nula $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ consta de todo $\mathbb{V}$ porque $T(v) = 0$ para todo vector v en $\mathbb{V}$. Es decir, Ker$(T) = \mathbb{V}$.
- El kernel de la Transformación Identidad $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ consta sólo del elemento cero. Es decir, Ker$(T) = \{0\} \subset \mathbb{V}$.

EJEMPLO (Determinación del kernel de una transformación lineal I)

Determine el kernel de la proyección $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.

Solución

Esta transformación lineal proyecta el vector (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ en el vector $(x, y, 0)$ del plano xy.

Por consiguiente, el kernel consta de todos los vectores que se encuentran sobre el eje z. Es decir, $\text{Ker}(T) = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

EJEMPLO (Determinación del kernel de una transformación lineal II)

Encuentre el kernel de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 0, x_1)$$

Solución

Para encontrar $\text{Ker}(T)$ es necesario determinar todos los $x = (x_1, x_2)$ en $\mathbb{R}^2$ tales que $T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 0, x_1) = (0, 0, 0)$. Lo anterior conduce al siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & = 0 \\ 0 & & = 0 \\ x_1 & & = 0 \end{cases}$$

cuya única solución es la trivial $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Por tanto, se tiene $\text{Ker}(T) = \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$.

EJEMPLO (Determinación del kernel de una transformación lineal III)

Encuentre el kernel de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = Ax$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución

El kernel de T es el conjunto de todos los $x = (x_1, x_2, x_3)$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)$. A partir de esta ecuación se obtiene el siguiente sistema homogéneo.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} x_1 & -x_2 & -2x_3 & = 0 \\ -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

Ejemplo (Determinación del kernel de una transformación lineal III) [Continuación]

Al escribir la matriz aumentada de este sistema en forma escalonada reducida se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x_1 & -x_3 & = 0 \\ x_2 & +x_3 & = 0 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = x_3 \\ x_2 & = -x_3 \end{array}\right.$$

Con el parámetro $t = x_3$ se obtiene la familia de soluciones

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el kernel de T es

$$\mathrm{Ker}(T) = \{t(1,-1,1) : t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{gen}\{(1,-1,1)\}.$$

TEOREMA (EL KERNEL ES UN SUBESPACIO DE $\mathbb{V}$)

El kernel de la transformación lineal $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es un subespacio del dominio $\mathbb{V}$.

EJEMPLO (BASE PARA EL KERNEL)

Sea $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x) = Ax$, donde x está en $\mathbb{R}^5$ y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Determine una base para $\text{Ker}(T)$ como subespacio de $\mathbb{R}^5$

TEOREMA (El kernel es un subespacio de $\mathbb{V}$)

El kernel de la transformación lineal $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es un subespacio del dominio $\mathbb{V}$.

EJEMPLO (Base para el Kernel)

Sea $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x) = Ax$, donde x está en $\mathbb{R}^5$ y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Determine una base para Ker(T) como subespacio de $\mathbb{R}^5$

EJEMPLO (Base para el Kernel) [CONTINUACIÓN]

Solución

Siguiendo el procedimiento mostrado en el ejemplo anterior, la matriz aumentada $[A|0]$ se reduce a la forma escalonada como se muestra a continuación.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & +2x_3 & & -x_5 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & & +2x_5 & = 0 \\ & & & x_4 & +4x_5 & = 0 \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & +2x_3 & & -x_5 & = 0 \\ & x_2 & -x_{:}3 & & +2x_5 & = 0 \\ & & & x_4 & +4x_5 & = 0 \end{array}\right.$$

Ejemplo (Base para el Kernel) [Continuación]

Con $x_3 = s$ y $x_5 = t$, se tiene

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s + t \\ s + 2t \\ s + 0t \\ 0s - 4t \\ 0s + t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, una base para el kernel de T está dada por

$$B = \{(-2, 1, 1, 0, 0), (1, 2, 0, -4, 1)\}.$$

y entonces,

$$\dim(\ker\ T) = 2$$

En el ejemplo anterior se encontró una base para el kernel de T al resolver el sistema homogéneo dado por $Ax = 0$. Este procedimiento se trata del mismo procedimiento aplicado para hallar el espacio solución del SELH $Ax = 0$.
Se afirma en el siguiente corolario.

Corolario (Kernel y SEL)

Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$. Entonces el kernel de T es igual al espacio solución del SEL $Ax = 0$.

Definición (Imagen)

Sea $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces, el conjunto de todos los vectores w en $\mathbb{W}$ tales que existe v en $\mathbb{V}$ y $T(v) = w$ se denomina *imagen* de T y se denota por $\mathrm{Im}(T)$. En otras palabras

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in \mathbb{W} : \exists v \in \mathbb{V} \wedge T(v) = w\} = \{T(v) : v \in \mathbb{V}\}.$$

Teorema (La imagen de T es un subespacio de $\mathbb{W}$)

La imagen de una transformación lineal $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{W}$.

Definición (Imagen)

Sea $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces, el conjunto de todos los vectores w en $\mathbb{W}$ tales que existe v en $\mathbb{V}$ y $T(v) = w$ se denomina *imagen* de T y se denota por $\operatorname{Im}(T)$. En otras palabras

$$\operatorname{Im}(T) = \{w \in \mathbb{W} : \exists v \in \mathbb{V} \wedge T(v) = w\} = \{\, T(v) : v \in \mathbb{V}\}\,.$$

Teorema (La imagen de T es un subespacio de $\mathbb{W}$)

La imagen de una transformación lineal $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{W}$.

Ejemplo (Imagen)

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = Ax$, donde x está en $\mathbb{R}^3$ y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine la imagen de T.

Solución

Un vector (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ está en la imagen de T, si existe (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z) = (a, b, c)$$

. A partir de esta ecuación se obtiene el siguiente sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} x_1 & & -2x_3 & = a \\ & x_2 & +x_3 & = b \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & = c \end{array} \right.$$

EJEMPLO [CONTINUACIÓN]

La matriz aumentada está en forma escalonada reducida.
Buscamos los valores de a, b, c para los cuales el SEL tiene solución.
La única condicón para que el SEL tenga solución es que

$$c = 0$$

Por tanto, la imagen de T es

$$\text{Im}(T) = \{(a, b, c) : c = 0\} = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) : a, b \in \mathbb{R}\} = \text{gen}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}.$$

De esta última ecuación podemos determinar que una base para la imagen de T es

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

y que

$$\text{dim}(ImT) = 2$$

EJEMPLO [CONTINUACIÓN]

Continuemos con este mismo ejemplo, vamos a obtener el kernel de T. Siguiendo el procedimiento mostrado en los ejemplos anteriores, la forma escalonada de la matriz aumentada $[A|0]$ es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x_1 \quad -2x_3 = 0 \\ x_2 \quad -x_3 = 0 \end{cases}$$

Con $x_3 = t$, se tiene

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta última ecuación podemos determinar que una base para la imagen de T es

$$B = \{(2,1,1)\} \text{ y que } \dim(kerT) = 1$$

Ejemplo [continuación]

Con todo lo visto en este ejemplo, notemos que

$$\dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\ker T) = 2 + 1 = 3$$

Este valor, 3, coincide con la dimensión del dominio de T. Si recordamos,

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

y la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3.

Lo que hemos concluído en este ejemplo, se cumple para toda TL.

DEFINICIÓN (Rango y Nulidad)

Sea $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal.
La dimensión del kernel de T se llama nulidad de T y se denota null(T).
La dimensión de la imagen de T se denomina rango de T y se denota rg(T).

TEOREMA (Teorema de la Dimensión)

Sea $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ n-dimensional a un espacio vectorial $\mathbb{W}$. Entonces,

$$\text{rg}(T) + \text{nul}(T) = \dim(\mathbb{V}).$$

Es decir,

$$\dim(\text{Im}\, T) + \dim(\ker T) = \dim(\mathbb{V}).$$

DEFINICIÓN (Rango y Nulidad)

Sea $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal.
La dimensión del kernel de T se llama nulidad de T y se denota null(T).
La dimensión de la imagen de T se denomina rango de T y se denota rg(T).

TEOREMA (Teorema de la Dimensión)

Sea $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ n-dimensional a un espacio vectorial $\mathbb{W}$. Entonces,

$$\mathsf{rg}(T) + \mathsf{nul}(T) = \dim(\mathbb{V}).$$

Es decir,

$$\dim(\mathsf{Im}\, T) + \dim(\mathsf{ker}\, T) = \dim(\mathbb{V}).$$

Matrices de transformaciones lineales

- En esta materia, sólo trabajamos con TL sobre espacios vectoriales de dimensión finita.
- Veremos ahora que para toda TL siempre es posible una representación matricial.
- La clave para representar una TL $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ por medio de una matriz es determinar cómo actúa T sobre una base de $\mathbb{V}$. Una vez que se conoce la imagen de todo vector de la base es posible aplicar las propiedades de las transformaciones lineales para determinar $T(v)$ para todo v en $\mathbb{V}$.

TEOREMA (MATRIZ ESTÁNDAR DE UNA TL)

Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal tal que

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, T(e_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, T(e_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz $m \times n$ cuyas columnas corresponden a $T(e_i)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1n} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2n} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

es aquella que cumple $T(v) = Av$ para toda $v \in \mathbb{R}^n$.
La matriz A se denomina matriz estándar de T.

Ejemplo (Matriz estándar)

Hallar la matriz estándar de la TL $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (x - 2y, 2x + y)$$

Solución

Comenzaremos por hallar los transformados de los vectores de la base canónica y los expresamos como vectores columnas.

$$T(e_1) = T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, T(e_2) = T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}, T(e_3) = T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Formamos la matriz A, colocando estos vectores como columnas, así

$$A = \begin{bmatrix}T(e_1) & T(e_2) & T(e_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Ejemplo (Continuación)

Para verificar, notemos que

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y \\ 2x+y \end{bmatrix}$$

lo que es equivalente a la fórmula de la función dada.

Ejemplo (Matriz estándar)

La matriz estándar de la TL $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (x, 0)$$

es

$$A = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TEOREMA (Matriz de una TL para cualquier base)

Sea $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal con

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ una base de } \mathbb{V}$$

$$\text{y } B' \text{ una base de } \mathbb{W}$$

Si

$$[T(v_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, [T(v_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, [T(v_n)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz $m \times n$ cuyas columnas corresponden a $[T(v_i)]_{B'}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1n} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2n} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

es aquella que cumple $[T(v)]_{B'} = A[v]_B$ para toda $v \in \mathbb{V}$.

EJEMPLO (MATRIZ ESTÁNDAR)

Hallar la matriz de la TL $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (x + y, 2x - y)$$

con respecto a las bases

$$B = \{(1, 2), (-1, 1)\} \text{ y } B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

Solución

Comenzaremos por hallar los transformados de los vectores de la base B y los expresamos como CL de los vectores de la base B'.

$$T(1, 2) = (3, 0) = 3(1, 0) + 0(0, 1) \Rightarrow [T(1, 2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(-1, 1) = (0, -3) = 0(1, 0) - 3(0, 1) \Rightarrow [T(-1, 1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO (Continuación))

Formamos la matriz A, colocando estos vectores como columnas, así

$$A = \left[[T(1,2)]_{B'} \quad [T(-1,1)]_{B'} \right] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO (aplicación de la matriz de una TL))

Use la matriz hallada en el ejemplo anterior para calcular $T(v)$ siendo $v = (2,1)$.

Solución

Con la base $B = \{(1,2),(-1,1)\}$ podemos escribir

$$v = (2, 1 = 1(1,2) - 1(-1,1)$$

de donde

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO (Continuación)

Así,

$$A[v]_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = [T(v)]_{B'}$$

Como $B' = \{(1,0),(0,1)\}$, se obtiene que

$$T(v) = 3(1,0) + 3(0,1) = (3,3)$$

Podemos verificar este valor obtenido, calculando directamente $T(v)$ utilizando la definición de la función.

$$T(2,1) = (2+1, 2*2-1) = (3,3)$$

DEFINICIÓN (CAMBIO DE BASE)

Sea $\mathbb{V}$ un EV y sean B y B' dos bases diferentes de $\mathbb{V}$.
Sea $Id : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ la transformación lineal identidad, considerando B como base del dominio y B' base del codominio.
La matriz P asociada a Id con respecto a B y B' es la matriz de cambio de base de B a B' (o matriz de transición de B a B').
Es decir,

$$[x]_{B'} = [Id(x)]_{B'} = P[x]_B$$

Ejemplo (Matriz de transición)

Hallar la matriz de cambio de base de B' a B con

$$B = \{(1,2),(-1,1)\} \text{ y } B' = \{(1,0),(0,1)\}$$

Solución

$$Id(1,2) = (1,2) = 1(1,0) + 2(0,1) \Rightarrow [(1,2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Id(-1,1) = (-1,1) = -1(1,0) + 1(0,1) \Rightarrow [(-1,1)]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Formamos la matriz P, colocando estos vectores como columnas

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

TEOREMA

Si P es la matriz de transición de una base B a una base B', entonces P es invertible y la matriz de transición de B' a B está dada porP^1.

Entonces la matriz de transición P de una base B a una base B' es la matriz P tal que

$$[x]_{B'} = P[x]_B$$

El teorema establece que la matriz P^{-1} es la matriz de transición de B' a B tal que

$$[x]_B = P^{-1}[x]_{B'}$$