Análisis Matemático I
Clase 20: Cálculo con funciones inversas

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería.
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2024

Noción de función inversa

Para poder definir la función inversa de f, necesitamos evitar que la función f asigne el mismo valor a dos elementos distintos del dominio. Así, introduciremos las funciones inyectivas:

Definición de función inyectiva

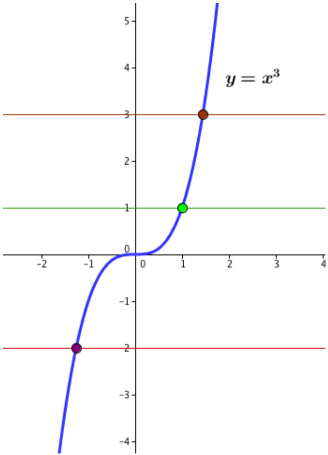
Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es inyectiva en D si:

$$f(x) \neq f(y)$$

siempre que $x \in D$, $y \in D$, y además $x \neq y$.

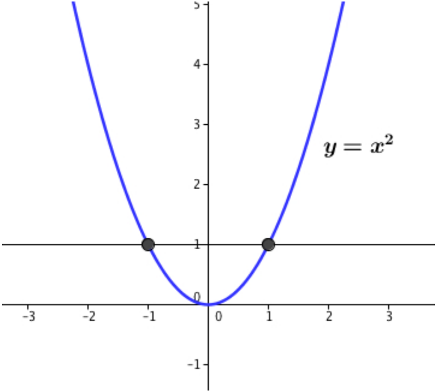
Prueba de la recta horizontal para funciones inyectivas

Observar la gráfica de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Es una función inyectiva.



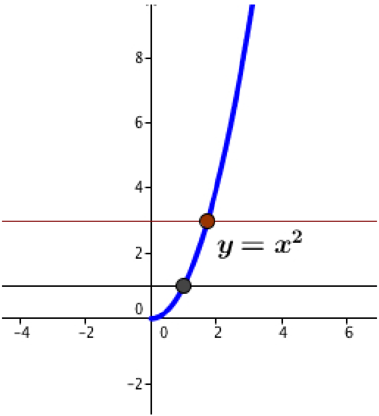
Toda recta horizontal corta en a lo sumo un punto a la gráfica de una función inyectiva.

Prueba de la recta horizontal para funciones inyectivas



Existe una recta horizontal que corta a la gráfica en dos puntos. Luego, $y = x^2$ (con dominio $\mathbb{R}$) no es inyectiva. Sin embargo, al modificar el dominio podemos construir una función inyectiva.

La función $f : [0, +\infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ es inyectiva:



Noción de función inversa

A continuación, introduciremos la noción de función inversa:

Definición de función inversa

Sea $f : D \to R$ una función inyectiva en D, donde R es la imagen o rango de f. La función inversa $f^{-1} : R \to D$ se define por:

$$f^{-1}(y) = x \text{ si y solo si } f(x) = y$$

para todo $y \in R$.

Observar que:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \textbf{y} \quad f(f^{-1}(x)) = x.$$

Ejemplo: determine la función inversa de $y = \frac{1}{2}x + 1$, y de $y = x^2$, $x \geq 0$.

Ejemplo: determinaremos la función inversa de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. A partir de la gráfica de f, sabemos que es inyectiva y que el rango de la función es $[0, \infty)$. La función inversa $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ y para calcular $f^{-1}(x)$ procedemos como sigue:

- primero despejamos x en la expresión de $f(x)$:

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}.$$

- dado que generalmente expresamos a las funciones con variable independiente x, intercambiamos los símbolos de x e y en la ecuación anterior:

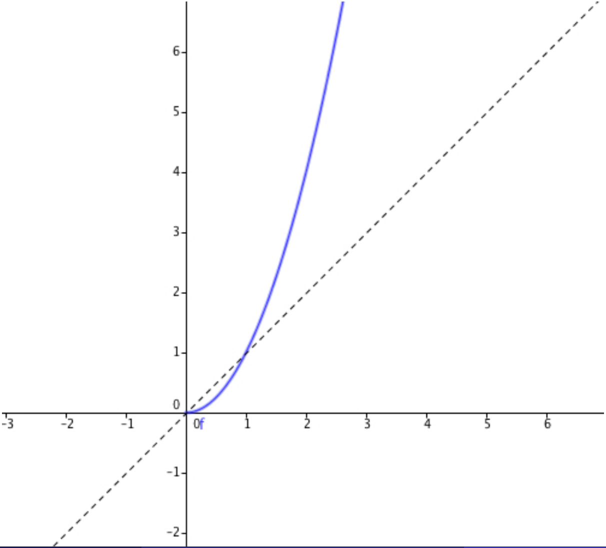
$$y = \sqrt{x}.$$

- Así:

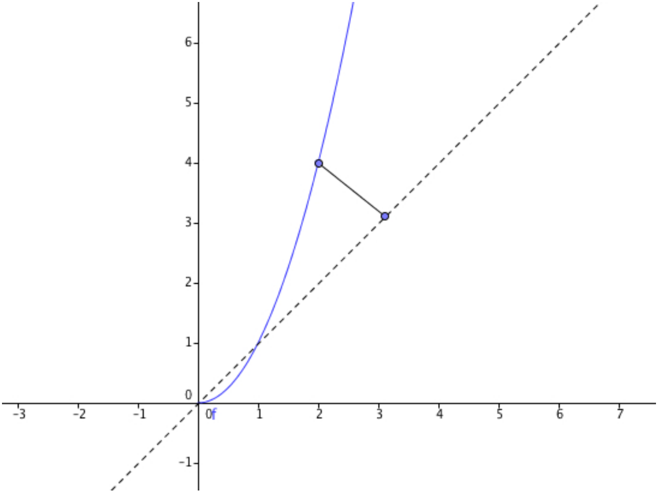
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Veremos gráficamente cómo determinar la función inversa y cómo se relacionan las gráficas de f y f^{-1}:

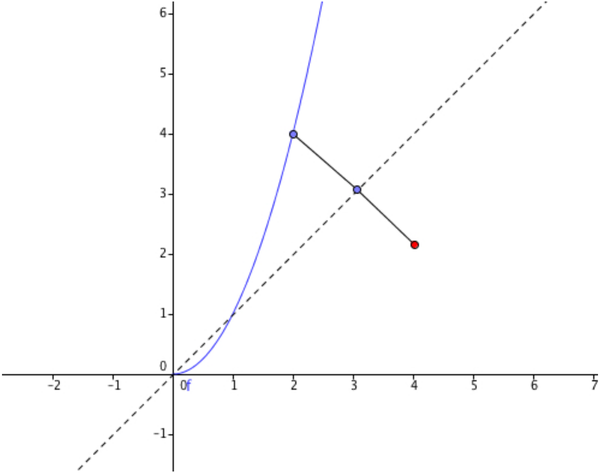
1-primero hacemos el gráfico de f y trazamos la recta $y = x$ con un trazo tenue:



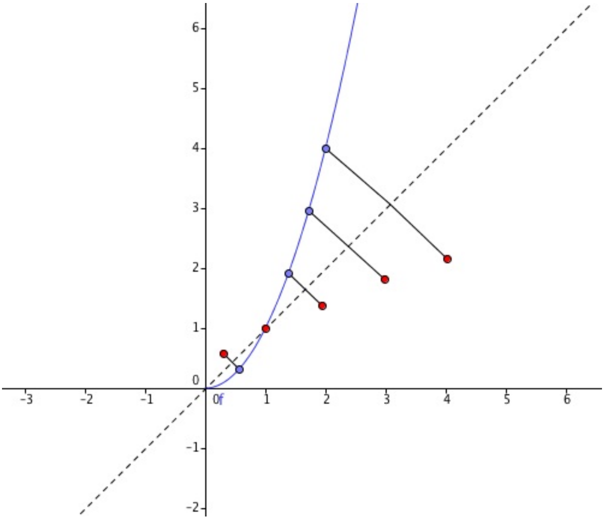
2-tomamos un punto de la gráfica de f y trazamos un segmento perpendicular a la recta $y = x$ que tenga como un extremo el punto elegido y el otro extremo en la recta $y = x$:



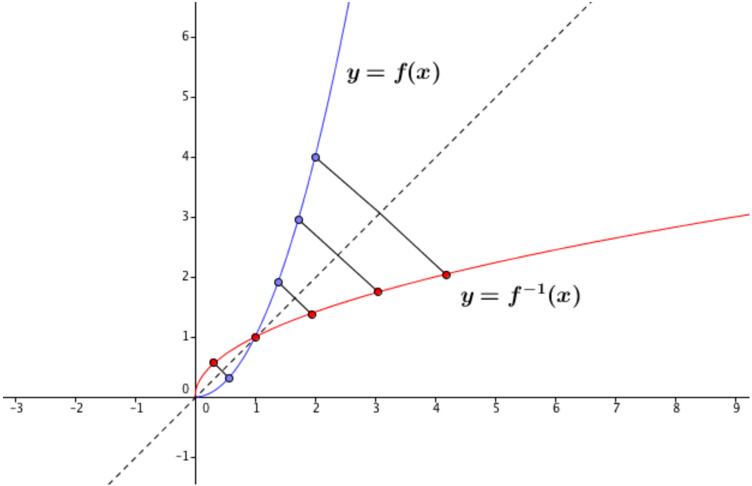
3-prolongamos el segmento del ítem anterior en dirección perpendicular a la recta $y = x$ hasta cubrir una longitud igual al segmento original:



4-realizamos el procedimiento anterior varias veces, resaltando (en este caso con rojo) los extremos de los segmentos construidos:



5-La gráfica de f^{-1} es la curva que conecta a todos los puntos construidos (puntos rojos).



Observar que la gráfica de la función inversa es simétrica con respecto la recta $y = x$.

Derivación de funciones inversas

Recordar que:

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Si f y f^{-1} son derivables, entonces la regla de la cadena implica:

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1.$$

Luego si $y = f(x)$ y $f'(x) \neq 0$ entonces:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Recordando que $x = f^{-1}(y)$ obtenemos la fórmula:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Ejemplos: determinar la derivada de la función inversa de $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = x^2$.

Ejemplos: determinar la derivada de la función inversa de $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=x^2$.
Solución: observar primero que $f'(x)=2x\neq 0$ para $x\in(0,\infty)$. Recordar que $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$. Luego:

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

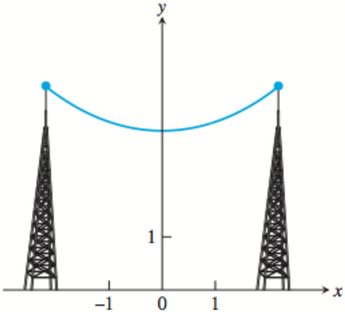
Observación: la función inversa y su derivada suelen denotarse usando a x como variable independiente. Así, la fórmula anterior para la derivada se puede escribir:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

En la clase siguiente utilizaremos la fórmula anterior para obtener la derivada de varias funciones inversas (funciones trigonométricas, exponenciales, hiperbólicas, etc.)

Estudio de funciones trascendentes

Excepto por las funciones trigonométricas, hasta ahora hemos analizado **funciones algebraicas,** es decir, funciones que se obtienen por suma, resta, división, multiplicación o extracción de raíces de polinomios.
Ahora comenzaremos con el estudio de funciones no algebraicas o también llamadas **trascendentes**.
Ejemplos de funciones no algebraicas son las funciones: trigonométricas, logarítmicas, exponenciales y otras funciones como las hiperbólicas.
La siguiente figura ilustra una función trascendente (función coseno hiperbólico):

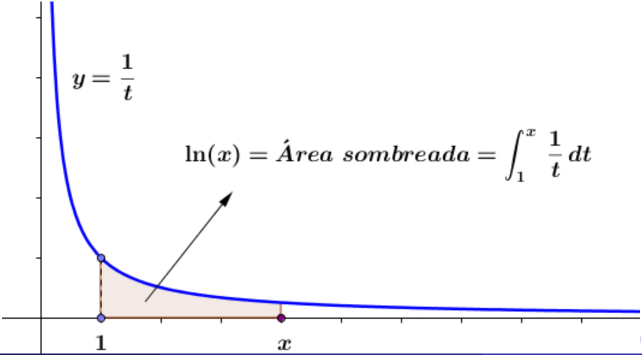


Definición del Logaritmo natural

Definimos la función logaritmo natural $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ como

$$ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \text{para } x > 0.$$

Observar que para x mayor a 1 se tiene:



Logaritmos

Además:

$$ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0,$$

si $x \in (0,1)$ entonces:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt < 0$$

y si $x > 1$:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt > 0.$$

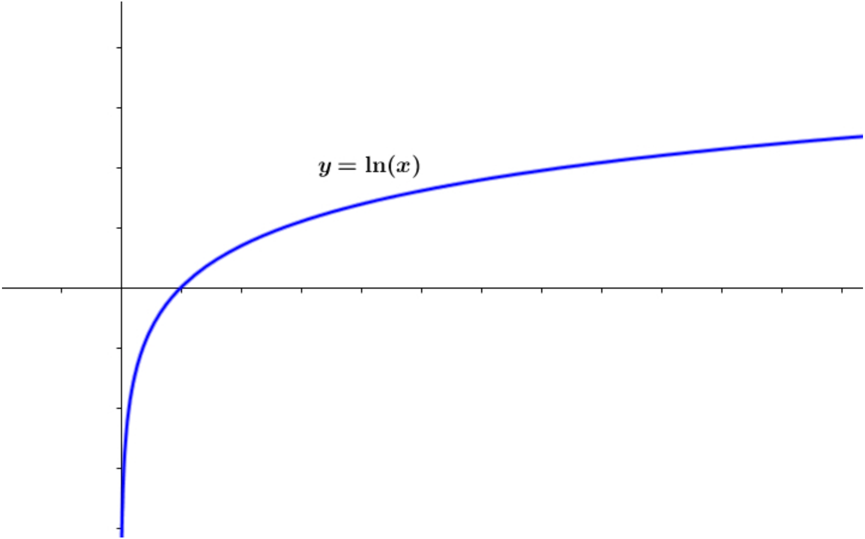
Además, por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \ (x > 0)$$

por ende ln es una función creciente pero es cóncava hacia abajo pues:

$$\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Logaritmos



Logaritmos

El logaritmo puede extenderse a valores de x negativos poniendo valores absolutos:

$$\ln(|x|) = \int_1^{|x|} \frac{1}{t} dt.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$ln'(|x|) = \frac{1}{x}, \text{ para cada } x \neq 0.$$

Así:

$$\int \frac{1}{x} dx = ln(|x|) + C.$$

Definición: el número e se define como:

$$ln(e) = 1.$$

Ejemplos: calcule $\int tan(x)dx, \int sec(x)dx, \int cotan(x)dx, \int cosec(x)dx.$

Vamos a calcular:

$$\int \tan(x)\, dx.$$

Primero escribimos:

$$\int \tan(x)\, dx = \int \frac{sen(x)}{\cos(x)}\, dx$$

y hacemos la sustitución:

$$u = \cos(x), \;\; du = -sen(x)\, dx.$$

Reemplazando:

$$\int \tan(x)\, dx = -\int \frac{1}{u}\, du = -\ln(|u|) + C = -\ln(|\cos(x)|) + C.$$

Función Exponencial

Función exponencial

Definimos la función exponencial, *exp*, como la inversa de la función logaritmo. Es decir, $exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ dada por:

$$exp(x) = ln^{-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observar: $exp(x) := e^x$,

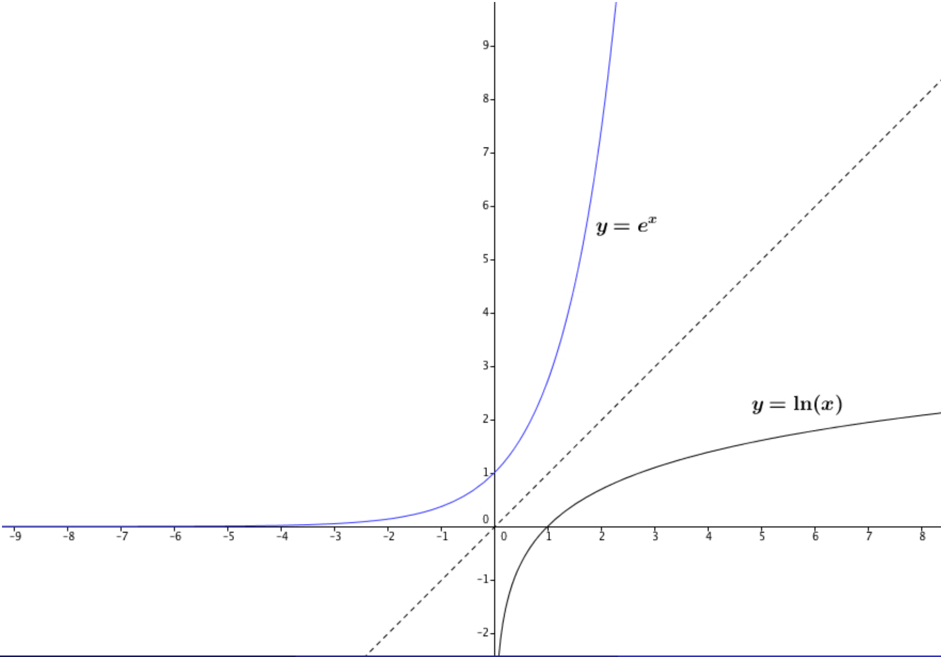
$$ln(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad e^{ln(y)} = y \quad (y > 0)$$

Además, si $y = e^x$, entonces:

$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{1}{ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

Así:

$$\int e^x dx = e^x + C.$$



$y = e^x$
$y = \ln(x)$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Función Exponenciales generales

Exponenciales generales

Sea $a > 0$. Entonces para todo x real definimos:

$$a^x := e^{x ln(a)}.$$

Observaciones generales:

- La función $f(x) = a^x$ es creciente si $a > 1$, y es decreciente si $0 < a < 1$.
- Denotamos por $g(x) = log_a(x)$ a la función inversa de a^x.

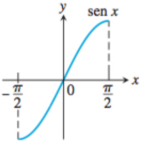
Derivada de exponenciales generales

Si $a > 0$, entonces:

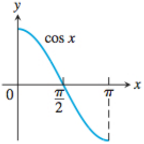
$$\frac{d}{dx} a^x = ln(a) a^x.$$

Tarea en casa para el alumno: Usar regla de la cadena en la definición de a^x.

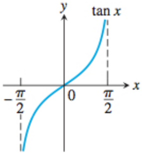
Las siguientes funciones trigonométricas son inyectivas:



$y = \operatorname{sen} x$
Dominio: $[-\pi/2, \pi/2]$
Rango: $[-1, 1]$



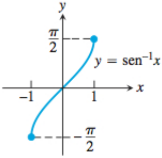
$y = \cos x$
Dominio: $[0, \pi]$
Rango: $[-1, 1]$



$y = \tan x$
Dominio: $(-\pi/2, \pi/2)$
Rango: $(-\infty, \infty)$

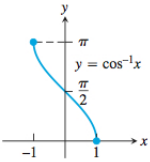
Y sus inversas son:

Dominio: $-1 \le x \le 1$
Rango: $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$



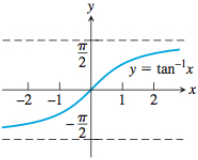
(a)

Dominio: $-1 \le x \le 1$
Rango: $0 \le y \le \pi$



(b)

Dominio: $-\infty < x < \infty$
Rango: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$



(c)

Derivada de $y = sen^{-1}x$: Sabemos que $f(x) = sen(x)$ es derivable en $(-\pi/2, \pi/2)$ y que su derivada es positiva allí. Luego, la función $f^{-1}(x) = sen^{-1}(x)$ es derivable en $(-1, 1)$ y:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cos(sen^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(sen(sen^{-1}(x)))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derivada de $y = sen^{-1}x$: Sabemos que $f(x) = sen(x)$ es derivable en $(-\pi/2, \pi/2)$ y que su derivada es positiva allí. Luego, la función $f^{-1}(x) = sen^{-1}(x)$ es derivable en $(-1, 1)$ y:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cos(sen^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(sen(sen^{-1}(x)))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De forma similar se puede probar que:

$$\frac{d}{dx}(cos^{-1})(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1).$$

$$\frac{d}{dx}(tan^{-1})(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derivada de $y = sen^{-1}x$: Sabemos que $f(x) = sen(x)$ es derivable en $(-\pi/2, \pi/2)$ y que su derivada es positiva allí. Luego, la función $f^{-1}(x) = sen^{-1}(x)$ es derivable en $(-1, 1)$ y:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cos(sen^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(sen(sen^{-1}(x)))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De forma similar se puede probar que:

$$\frac{d}{dx}(cos^{-1})(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1).$$

$$\frac{d}{dx}(tan^{-1})(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Usando las derivadas anteriores, se pueden calcular integrales de la forma:

$$\int \frac{2}{\sqrt{3-4x^2}}dx =$$

Funciones hiperbólicas

La utilidad principal de las funciones hiperbólicas en ingeniería radica en representar de forma concisa expresiones complejas obtenidas en el análisis de vibraciones. También, hay casos de estructuras donde se han usado funciones hiperbólicas para su diseño, como es el caso del Arco Gateway en E.E.U.U. donse se usó el coseno hiperbólico.

Funciones Hiperbólicas

Seno hiperbólico:

$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Coseno hiperbólico:

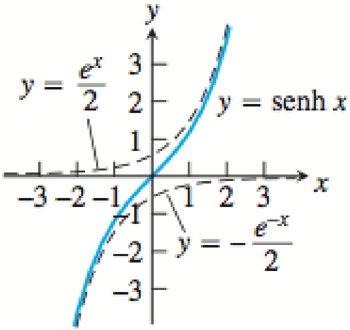
$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Tangente hiperbólica:

$$tanh(x) = \frac{senh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Observar que el dominio de las funciones hiperbólicas anteriores es $\mathbb{R}$.

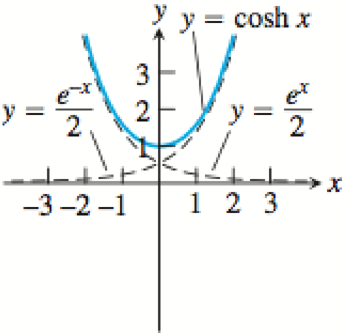
Gráficos de las funciones hiperbólicas



(a)

Seno hiperbólico:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



(b)

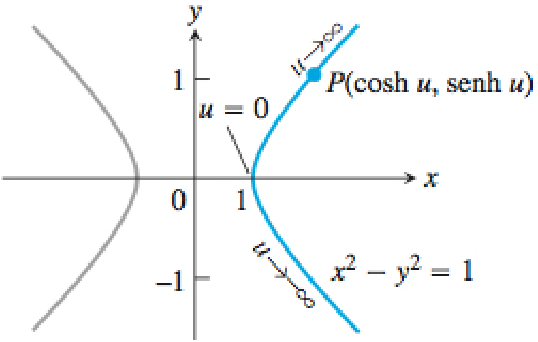
Coseno hiperbólico:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

A partir de la relación:

$$cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$$

se puede deducir que los puntos $x = cosh(u)$ y $y = senh(u)$ se encuentran en la rama derecha de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$. Esta es la razón del nombre **funciones hiperbólicas**.



Derivadas de funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(senh)(x) = cosh(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{d}{dx}(cosh)(x) = senh(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{d}{dx}(tanh)(x) = sech^2(x) = \frac{1}{cosh^2(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Derivadas de funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(senh)(x) = cosh(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{d}{dx}(cosh)(x) = senh(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{d}{dx}(tanh)(x) = sech^2(x) = \frac{1}{cosh^2(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Además, se tienen las derivadas de funciones hiperbólicas inversas (se dejan como ejercicio en los prácticos):

1. $(senh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $(cosh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$.

Derivadas de funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(senh)(x) = cosh(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{d}{dx}(cosh)(x) = senh(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{d}{dx}(tanh)(x) = sech^2(x) = \frac{1}{cosh^2(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Además, se tienen las derivadas de funciones hiperbólicas inversas (se dejan como ejercicio en los prácticos):

1. $(senh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $(cosh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$.

Usando las derivadas anteriores, se pueden calcular integrales de la forma:

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{3+4x^2}}dx =$$