- Vimos que la matriz de la transformación lineal $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ depende de la base de $\mathbb{V}$. La matriz de T con respecto a una base B es diferente la matriz de T con respecto a otra base B'.
- Uno de los problemas clásicos del álgebra lineal es saber si es posible hallar una base B tal que la matriz de T con respecto a B sea diagonal. La solución de este problema se analiza más adelante. Se presentan ahora los fundamentos para resolver el problema.
- Si A es la matriz asociada a la TL respecto de las bases B y B', entinces

$$[T(v)]_{B'} = A[v]_B$$

para toda $v \in \mathbb{V}$. Este hecho, lo representamos así

$$[v]_B \xrightarrow{\quad A \quad} [T(v)]_B$$

Supongamos ahora que tenemos dos matrices asociadas a la TL respecto a bases diferentes y las matrices de transición entre esas bases:

- A: Matriz de T con respecto a B
- A': Matriz de T con respecto a B'
- P: Matriz de transición de B' a B
- P': Matriz de transición de B a B'
  (Por teorema anterior, $P' = P^{-1}$)

Veamos cómo están relacionadas las matrices

$$\begin{tikzcd}
[v]_B \arrow[r, "A"] & {[T(v)]_B} \arrow[d, "P^{-1}"] \\
{[v]_{B'}} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "A'"] & {[T(v)]_{B'}}
\end{tikzcd}$$

Observe que en el diagrama anterior hay dos formas de llegar de la matriz de coordenadas $[v]_{B'}$ a la matriz de coordenadas $[T(v)]_{B'}$. Una forma es directa, por medio de la matriz A' para obtener

$$A'[v]_{B'} = [T(v)]_{B'}$$

La otra forma es indirecta, por medio de las matrices P, A y P^{-1} para obtener

$$P{-}1AP[v]_{B'} = [T(v)]_{B'}$$

Esto implica que

$$A' = P^{-1}AP$$

EJEMPLO (APLICACIÓN DE MATRIZ DE LA TL I))

Hallar la matriz A' de la TL $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (2x - 2y, -x + 3y)$$

con respecto a la base

$$B' = \{(1, 0), (1, 1)\}$$

Solución

La matriz estándar asociada a T es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de B' a la base canónica es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La inversa de esta matriz es la matriz de transición de la base canónica a B'

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO (Continuación))

Entonces, la matriz de T respecto a B' es

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO (Aplicación de matriz de la TL II))

Sean las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$

$$B = \{(-3,2),(4,-2)\} \text{ y } B' = \{(-1,2),(2,-2)\}$$

Y sea

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

la matriz de la TL $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ respecto a la base B.
Hallar A', la matriz de la TL respecto a la base B'.

Solución

La matriz de transición de B' a la base B es

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de la base B a B' es

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo (Continuación)

Entonces, la matriz de T respecto a B' es

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO (Aplicación de matriz de la TL III))

Para la TL del ejemplo anterior, encontrar $[v]_B$, $[T(v)]_B$ y $[T(v)]_{B'}$ para el vector V cuyo vector de coordenadas es

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución

Para hallar $[v]_B$ se utiliza la matriz de transición P de B' a B.

$$[v]_B = P[v]_{B'} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Para hallar $[T(v)]_B$ se premultiplica $[v]_B$ por la matriz A

$$[T(v)]_B = A[v]_B \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ -14 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO (Continuación)

Para hallar $[T(v)]_{B'}$ se premultiplica $[T(v)]_B$ por la matriz P^{-1}

$$[T(v)]_{B'} = P^{-1}[T(v)]_B \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -21 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O, podemos premultiplicar $[v]_{B'}$ por la matriz A'

$$[T(v)]_{B'} = A'[v]_{B'} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definición (Semejanza)

Sean A y A' dos matrices cuadradas de orden n, se dice que A' es semejante a A si existe una matriz invertible P tal que

$$A' = P^{-1}AP$$

Teorema

Sean A, B y C matrices cuadradas de orden n. Entonces,

1. A es semejante a A.
2. Si A es semejante a B, entonces B es semejante a A.
3. Si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

Demostración.

Como muestra el teorema, si A' es semejante a A, entonces A es semejante a A'. Por lo tanto, tiene sentido decir simplemente que A y A' son semejantes.

EJEMPLO (Matrices semejantes)

- Del ejemplo I anterior, las matrices A y A' son semejantes porque $A' = P^{-1}AP$ con
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- Del ejemplo II anterior, las matrices A y A' son semejantes porque $A' = P^{-1}AP$ con
$$P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$