

Análisis Matemático I

Clase 21: Regla de L'Hopital. Técnicas de integración: integración por partes

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2024

Introducción a regla de L'Hopital

Supongamos que queremos calcular:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

donde f y g son funciones continuas y derivables. El límite no puede calcularse por evaluación pues el numerador y el denominador se anulan en $x = x_0$ (indeterminación '0/0').

Introducción a regla de L'Hopital

Supongamos que queremos calcular:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

donde f y g son funciones continuas y derivables. El límite no puede calcularse por evaluación pues el numerador y el denominador se anulan en $x = x_0$ (indeterminación '0/0'). Sin embargo, si dividimos ambos miembros por $x - x_0$ se obtiene (usando teorema del valor medio):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(d_x)}$$

donde c_x y d_x están entre x y x_0 .

Esto sugiere que uno podría calcular un límite 'indeterminado' a través de un cociente de derivadas.

Regla de L'Hopital

Sean f y g funciones derivables en (a, b) . Supongamos que $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b) . Supongamos que el límite:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe o es $+\infty$ o $-\infty$. Entonces:

(1) Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(2) Si $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observaciones

- La regla de L'Hopital vale para cualquier tipo de límite: límites ordinarios (digamos $x \rightarrow a$), laterales, $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$.
- Los enunciados análogos cuando $x \rightarrow b$ o $x \rightarrow b^-$ son también ciertos.

Ejemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen}(x)}{x}$$

Regla de L'Hopital

Ejemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen}(x)}{x}$$

Solución: sean $f(x) = x - \text{sen}(x)$ y $g(x) = x$ (ambas son funciones derivables). Observar que f y g tienden a 0 cuando $x \rightarrow 0$ (tenemos un límite indeterminado, estamos en la condición (1) de la regla de L'Hopital). Para aplicar la regla de L'Hopital, verificamos si el siguiente límite existe:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{1} = 0.$$

Luego, aplicando la regla de L'Hopital obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{1} = 0.$$

Regla de L'Hopital

A veces es necesario aplicar más de una vez la regla de L'Hopital.

Ejemplos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Regla de L'Hopital

A veces es necesario aplicar más de una vez la regla de L'Hopital.

Ejemplos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Solución: sean $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^2$ (ambas son funciones derivables). Observar que el denominador tiende a infinito cuando $x \rightarrow +\infty$ (estamos en el ítem (2) de la regla de L'Hopital). Sin embargo, el límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x}$$

vuelve a ser indeterminado (el denominador tiende a infinito). Intentamos aplicar la regla de L'Hopital a ese límite. Analizamos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Regla de L'Hopital

Así por la regla de L'Hopital aplicada a e^x y $2x$, se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

lo que a su vez nos dice, nuevamente por regla de L'Hopital aplicada a e^x y x^2 , que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty.$$

Regla de L'Hopital

Así por la regla de L'Hopital aplicada a e^x y $2x$, se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

lo que a su vez nos dice, nuevamente por regla de L'Hopital aplicada a e^x y x^2 , que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty.$$

El ejercicio anterior se realizó paso a paso. El estudiante puede hacerlo así directamente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

siempre y cuando diga que está usando la regla de L'Hopital y esté corroborando que en cada paso esté en las condiciones (1) o (2) de la regla. Veamos un ejemplo donde se aplica la regla de L'Hopital sin cuidado.

Supongamos que queremos calcular el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}.$$

Observar que el denominador es cero en $x = 1$ por ende no podemos aplicar la regla del cociente de límites. Pero podemos factorizar y obtener:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 2)}{(x - 1)(x - 2)} = -4.$$

Sin embargo, podríamos haber usado la regla de L'Hopital dado que tanto el numerador como el denominador tienden a cero cuando $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{2} = 3$$

¿Dónde está el error?

Regla de L'Hopital

En otros casos, es necesario primero transformar el límite para que pueda expresarse en la forma de cociente. Por ejemplo:

- Para el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x)$$

hay dos alternativas:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

o:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\ln(x)}}$$

La mejor alternativa es la primera.

Más límites indeterminados

Supongamos que queremos calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$$

Observar que hay una indeterminación del tipo 0^0 . Vamos a aplicar la regla de L'Hopital. Para ello, necesitamos transformar la expresión x^x en cociente. Con el fin de *bajar* la potencia x , vamos a calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Observar que se ha elegido la alternativa de dejar el logaritmo en el numerador, ya que así será más sencilla de aplicar la regla de L'Hopital.

Estamos en la situación (2) de la regla, pues el denominador tiende a $+\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$. Ahora corroboramos que el límite del cociente de las derivadas existe

Más límites indeterminados

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Así, por la regla de L'Hopital tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^x) = 0.$$

Sin embargo, **queríamos calcular el límite de x^x** . Para revertir el efecto del logaritmo, aplicamos la función exponencial

$$e^0 = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x,$$

es decir

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

Integración por partes

La integración por partes es una técnica que se utiliza para calcular integrales de la forma:

$$\int F(x)G(x)dx.$$

Integración por partes

La integración por partes es una técnica que se utiliza para calcular integrales de la forma:

$$\int F(x)G(x)dx.$$

Por ejemplo, vamos a utilizarla para calcular:

$$\int x \cdot \cos(x) dx, \int \ln(x) dx, \int e^x \sin(x) dx, \text{ etc.}$$

Integración por partes

Idea: sean f y g funciones derivables. Entonces la regla del producto para derivadas implica:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = (f' \cdot g + f \cdot g')(x).$$

Así, la función $f \cdot g$ es una antiderivada de $f' \cdot g + f \cdot g'$. Luego:

$$\int (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)) dx = f \cdot g + C.$$

Obtenemos entonces:

$$\int f(x)g'(x)dx = f \cdot g - \int f'(x)g(x)dx + C.$$

Cuando calculemos $\int f'(x)g(x)dx$ colocaremos una constante C , luego podemos reescribir la igualdad anterior en la forma:

Integración por partes

Integración por partes

Sean f y g funciones derivables. Entonces:

$$\int f(x)g'(x)dx = f \cdot g - \int f'(x)g(x)dx.$$

Integración por partes

Integración por partes

Sean f y g funciones derivables. Entonces:

$$\int f(x)g'(x)dx = f \cdot g - \int f'(x)g(x)dx.$$

Para recordar mejor la fórmula anterior, se suele llamar:

$$u = f(x), \quad v = g(x)$$

así:

$$du = f'(x)dx, \quad dv = g'(x)dx$$

y entonces la fórmula de integración por partes se puede escribir:

Integración por partes

Sean f y g funciones derivables. Entonces:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

Integración por partes

Observación: para calcular una integral de la forma:

$$\int F(x)G(x)dx$$

por integración por partes, se deben elegir u y dv en la integral, luego calcular du y v y finalmente aplicar la fórmula de integración por partes.

Ejemplos:



$$\int x.\cos(x)dx =$$

Integración por partes

Observación: para calcular una integral de la forma:

$$\int F(x)G(x)dx$$

por integración por partes, se deben elegir u y dv en la integral, luego calcular du y v y finalmente aplicar la fórmula de integración por partes.

Ejemplos:



$$\int x \cdot \cos(x) dx =$$

Solución: tenemos dos posibilidades para u y para dv . Para u elegimos la que es fácil de derivar y cuya derivada es más simple que u . Y para dv la que es fácil de integrar y cuya antiderivada no es mucho más compleja que v . Así:

$$u = x \Rightarrow du = 1 dx.$$

$$dv = \cos(x) dx \Rightarrow v = \text{sen}(x).$$

Reemplazando en la fórmula de integración por partes, se obtiene:

$$\int x \cdot \cos(x) dx = x \cdot \text{sen}(x) - \int \text{sen}(x) dx = x \cdot \text{sen}(x) + \cos(x) + C.$$

Integración por partes para integrales definidas

Sean f y g funciones derivables en $[a, b]$. Entonces:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Cuidado: la variable de integración sigue siendo x (de hecho, u y v son funciones de x), así que no hay que cambiar los extremos de integración.

Integración por partes



$$\int_1^2 \ln(x) dx =$$



$$\int_1^2 \ln(x) dx =$$

Solución: en este caso no podemos elegir $dv = \ln(x)dx$ pues deberíamos integrar $\ln(x)$ que es justamente lo que se quiere hacer. Entonces tomamos:

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = 1 dx \Rightarrow v = x$$

Luego:

$$\int_1^2 \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = 2\ln(2) - 1.$$