VALORES Y VECTORES PROPIOS

Álgebra-LCC

Facultad de Ingeniería- Universidad Nacional de Cuyo

2024

VALORES Y VECTORES PROPIOS.

- DEFINICIÓN.
- EJEMPLOS.
- INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

  revizar

Definición de valor y vector propio

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Un escalar λ es un autovalor de A si existe un vector x diferente de cero en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$Ax = \lambda x$$

El vector x es un autovector de A correspondiente a λ.

Son conceptos equivalentes:

- Valor propio y vector propio.
- Valor característico y vector característico.
- Autovalor y autovector.
- Eigenvalor y eigenvector.

Ejemplos

1. El vector $x = (1, 1)$ es un autovalor de $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Veamos:

$$Ax = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5x$$

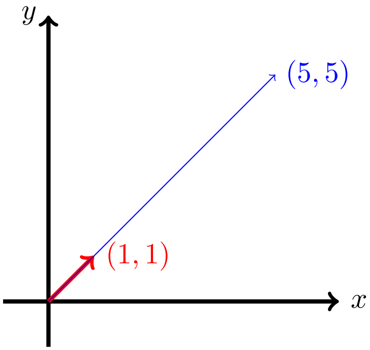
2. El vector $x = (2, 4)$ NO es un autovalor de $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

   Veamos:

$$Ax = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Para algún valor de λ.

De la definición, $Ax = \lambda x$ vemos que x es un autovalor de A si y sólo si Ax y x pertenecen a una misma recta.
Del ejemplo anterior,



¿Qué sucedería si λ fuera negativo?.

AUTOESPACIO

Si consideramos el conjunto de los autovectores junto con el vector nulo, obtenemos un subespacio especial de $\mathbb{R}^n$ llamado **autoespacio de** λ y lo denotamos como E_λ.

$$E_\lambda = \{0\} \cup \{x : x \text{ es autovector de } \lambda\}$$

La dimensión de este subespacio se llama **multiplicidad geométrica de** λ.

Cálculo

La ecuación $Ax = \lambda x$ es una ecuación no lineal; λ y x son incógnitas que se multiplican. Si fuese posible encontrar λ, la ecuación sería lineal para x. Se puede escribir a $Ax = \lambda x$ como

$$Ax = \lambda I x$$

O bien,

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Si λ es un autovalor de A, el autovector asociado debe cumplir ser una solución diferente de cero para esta última ecuación. Que el sistema homogéneo de ecuaciones tenga soluciones diferentes de cero es equivalente a que la matriz de coeficientes

$$A - \lambda I$$

no sea inversible, es decir,

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Cálculo

Teorema

Sea A una matriz de $n \times n$.

1. Un autovalor de A es un escalar λ que cumple
$$\det(A - \lambda I) = 0$$
2. Los autovectores de A correspondientes a λ son las soluciones diferentes de cero asociadas al sistema
$$(A - \lambda I)x = 0$$

La ecuación
$$\det(A - \lambda I)x = 0$$
se llama **ecuación característica** de A. Cuando se desarrolla en forma de polinomio, se llama **polinomio característico**.
$$\det(A - \lambda I) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

Cálculo

- Los autovalores de una matriz $n \times n$ son las raíces del polinomio característico de A. Como éste polinomio siempre es de grado n, tiene exactamente n raíces que correspondes a los autovalores de A.
  Entonces A tiene n autovalores que pueden ser todos diferentes, repetidos, complejos. Los enumeramos en forma general como
  $$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$
- Si un autovalor λ_i aparece como una raíz múltiple (repetida k veces) del polinomio característico, entonces se dice que λ_i tiene **multiplicidad algebraica** k.

Ejemplo 1.

Encontrar los autovalores y autovectores de $A = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

Primero hallamos el polinomio característico de A

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -12 \\ 1 & -5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-5-\lambda) - (-12) \\ &= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2) \end{aligned}$$

Así, la ecuación característica de A es

$$(\lambda+1)(\lambda+2) = 0 \text{ o bien } \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

De donde se obtienen los autovalores de A

$$\lambda_1 = -1 \text{ y } \lambda_2 = -2$$

(ambos con multiplicidad algebraica igual a 1).

Ejemplo

Para obtener los autovectores correspondientes, debemos resolver dos veces el sistema lineal homogéneo asociado a

$$(A - \lambda I)x = 0$$

una vez para $\lambda_1 = -1$ y otra vez para $\lambda_2 = -2$.

Ejemplo

Para $\lambda_1 = -1$, la matriz aumentada asociada al sistema $(A - (-1)I)x = 0$ resulta

$$\begin{pmatrix} 3 & -12 & : & 0 \\ 1 & -4 & : & 0 \end{pmatrix}$$

Que se reduce por renglones a $\begin{pmatrix} 1 & -4 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$

Considerando $x = (x_1, x_2)^T$, la ecuación asociada al sistema es $x_1 - 4x_2 = 0$. Tomando $x_2 = t$, obtenemos que cada autovector asociado a $\lambda_1 = -1$ es de la forma

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } t \neq 0$$

El autoespacio de $\lambda_1 = -1$ es

$$E_{-1} = \{\begin{pmatrix} 4t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} = \{t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$$

(resulta $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad geométrica igual a 1)

Ejemplo

Para $\lambda_2 = -2$, la matriz aumentada asociada al sistema $(A - (-2)I)x = 0$ resulta

$$\begin{pmatrix} 4 & -12 & : & 0 \\ 1 & -3 & : & 0 \end{pmatrix}$$

Que se reduce por renglones a $\begin{pmatrix} 1 & -3 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$

Considerando $x = (x_1, x_2)^T$, la ecuación asociada al sistema es $x_1 - 3x_2 = 0$. Tomando $x_2 = t$, obtenemos que cada autovector asociado a $\lambda_1 = -2$ es de la forma

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } t \neq 0$$

El autoespacio de $\lambda_1 = -2$ es

$$E_{-2} = \{\begin{pmatrix} 3t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} = \{t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$$

(resulta $\lambda_2 = -2$ multiplicidad geométrica igual a 1)

Ejemplo 2.

Encontrar los autovalores y autovectores de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Primero hallamos el polinomio característico de A

$$\det(A - \lambda I) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$$

Así, la ecuación característica de A es

$$(2-\lambda)^3 = 0$$

De donde, el único autovalor de A es $\lambda = 2$.

Para encontrar los autovectores asociados a $\lambda = 2$, escalonamos la matriz aumentada asociada al sistema $(A - 2I)x = 0$ y obtenemos

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$ con t, s no ambos cero a la vez

Ejemplo

El autoespacio de $\lambda = 2$ es

$$E_2 = \{t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t, s \text{ no ambos cero a la vez}\}$$

En este ejemplo,

- la multiplicidad algebraica de $\lambda = 2$, es 3.
- la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$, es 2.

En general, la multiplicidad algebraica es mayor o igual que la multiplicidad geométrica.

Propiedades

De los cálculos del ejemplo anterior, notamos que

Teorema

Si A es una matriz triangular (triangular inferior, superior o diagonal) de $n \times n$, entonces los autovalores de A son los elementos de la diagonal.

Propiedades

Resumiendo lo visto hasta ahora

Teorema

Si A es una matriz $n \times n$ y λ es un número real, entonces son equivalentes las siguientes proposiciones

1. λ es un autovalor de A.
2. El sistema de ecuaciones $(A - \lambda I)x = 0$ tiene soluciones no triviales.
3. En $\mathbb{R}^n$ existe un vector $x \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x$.
4. λ es solución de la ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$

OBSERVACIONES

- Si x_1 y x_2 son autovectores correspondientes al mismo autovalor λ, entonces la suma $x_1 + x_2$ también es autovector correspondiente al mismo autovalor λ.
  En efecto,
  $$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2)$$
- Sea A una matriz con autovalor λ y autovector correspondiente x, entonces todo múltiplo escalar (diferente de cero) de x es también un autovector de A.
  En efecto, sabemos que $Ax = \lambda x$ y sea $c \in \mathbb{R}$ diferente de cero,
  $$A(cx) = c(Ax) = c(\lambda x) = \lambda(cx)$$

Hemos probado que el conjunto de todos los autovectores de un autovalor λ junto con el vector cero, es subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Propiedades

Si conocemos los autovalores y autovectores de una matriz, podemos obtener los autovalores y autovectores de cualquier potencia entera positiva de esa matriz.

Teorema

Sea A una matriz. Sea λ un autovalor de A con autovector correspondiente x y sea k un entero positivo. Entonces λ^k es un autovalor de A^k y x es un autovector correspondiente.

Una relación entre autovalores e inversa de una matriz.

Teorema

1. Una matriz cuadrada A es inversible si y sólo si, $\lambda = 0$ no es un autovalor de A.
2. Si λ es un autovalor de la matriz inversible A, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1}

Propiedades

Se cumplen las siguientes propiedades

1. Los autovalores de A y A^T, son iguales.
2. La suma de los autovalores de A es igual a la traza de A.
3. El producto de los autovalores de A es igual al determinante de A.
4. Si λ es un autovalor de A, entonces $k\lambda$ $(k \neq 0)$ es autovalor de kA.

Teorema

Sea A una matriz de orden n. Si A tiene n autovalores distintos, entonces A tiene un conjunto de n autovectores LI.