1) Determine el área total encerrada por el gráfico de

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \quad \text{y el eje } x.$$

Solución:

Primero encontremos las intersecciones de la gráfica de f con el eje x

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\boxed{x_1 = 0}$$

$$\boxed{x_2 = 1}$$

$$\boxed{x_3 = 2}$$

Luego, el área pedida es:

$$A = \left| \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right) \Big|_0^1 \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right) \Big|_1^2 \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4} - 1 + 1 - 0 \right| + \left| \frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right) \right|$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

(2) Determine los intervalos de concavidad de

$$y = \frac{x^2}{x+1} = f(x)$$

<u>Solución</u>: encontremos $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Derivamos dos veces:

$$y' = \frac{2x.(x+1) - x^2.1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

$$y'' = \frac{(2x+2).(x+1)^2 - (x^2+2x).2(x+1).1}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x+1)}\left[(2x+2).(x+1) - (x^2+2x).2\right]}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{2\cancel{x^2}+2x+2x+2-2\cancel{x^2}-4x}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Analizamos dónde y'' es cero o no existe (observar que para concavidad no tenemos en cuenta a y').

y'' nunca es cero, pues si $\frac{2}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow 2=0$ absurdo

y y'' no existe en $x=-1$. Luego

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
Valor de prueba	-2	0
Signo de f''	$-$	$+$
Conclusión	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

③ Determine el área encerrada por $y = x \cdot \sqrt{4-x^2}$ y el eje x.

Solución: buscamos dónde $y=0$:

$$x \cdot \sqrt{4-x^2} = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad\qquad \sqrt{4-x^2} = 0$$

$$4 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$|x| = 2 \quad \begin{cases} x_2 = -2 \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Así,

$$A = \left| \int_{-2}^{0} x \cdot \sqrt{4-x^2}\, dx \right| + \left| \int_{0}^{2} x \cdot \sqrt{4-x^2}\, dx \right|$$

Hacemos la sustitución

$$u = 4 - x^2$$

$$du = -2x\, dx \Rightarrow x \cdot dx = -\frac{1}{2} du.$$

Para sustituir en las integrales definidas, cambiamos los extremos:

$x = -2 \Rightarrow u = 0$
$x = 0 \Rightarrow u = 4$
$x = 2 \Rightarrow u = 0.$

Luego

$$A = \left| \int_0^4 -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{u}\, du \right| + \left| \int_4^0 -\frac{1}{2} \sqrt{u}\, du \right|$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{3} \left| u^{3/2} \Big|_0^4 \right| + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left| u^{3/2} \Big|_4^0 \right|$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$ (observar que no se vuelve a la variable x)

Otra forma: es encontrar la antiderivada de $x \cdot \sqrt{4-x^2}$:

$$\int x \cdot \sqrt{4-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \int \sqrt{u}\, du = -\frac{1}{3} u^{3/2} + C$$

$$= -\frac{1}{3} (4-x^2)^{3/2} + C$$

(observar que aquí sí se vuelve a x).

Luego:

$$\left| \int_{-2}^0 x \cdot \sqrt{4-x^2}\, dx \right| = \left| -\frac{1}{3} (4-x^2)^{3/2} \Big|_{-2}^0 \right| = \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3}$$

y $$\left| \int_0^2 x \cdot \sqrt{4-x^2}\, dx \right| = \frac{8}{3}.$$

(4) Suponga que las aristas de una caja rectangular cambian a las siguientes tasas:

$$x' = 1 \text{ m/s}$$
$$y' = -2 \text{ m/s}$$
$$z' = 1 \text{ m/s}$$

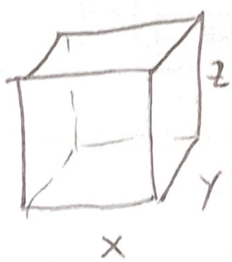
Determine a qué tasa cambian

a) el volumen de la caja cuando $x = 4$ m, $y = 3$ m, $z = 2$ m

b) la longitud de la diagonal $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ cuando

c) el área superficial cuando

Solución:



Recordar que x, y, z son funciones del tiempo.

a) El volumen es

$$V(t) = x(t) \cdot y(t) \cdot z(t).$$

Derivamos usando regla del producto:

$$V'(t) = (x(t) \cdot y(t))' \cdot z(t) + (x(t) \cdot y(t)) \cdot z'(t)$$
$$= (x'(t)\, y(t) + x(t)\, y'(t))\, z(t) + x(t)\, y(t)\, z'(t)$$
$$= x'(t)\, y(t)\, z(t) + x(t)\, y'(t)\, z(t) + x(t)\, y(t)\, z'(t).$$

Reemplazando $x(t) = 4$, $y(t) = 3$, $z(t) = 2$
$x'(t) = 1$, $y' = -2$, $z'(t) = 1$

obtenemos V' (en m^3/s).

b) Derivemos $s(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$ usando regla de la cadena

$$s'(t) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}} \cdot \left(2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t)\, y'(t) + 2z(t)\, z'(t)\right)$$

Reemplazando los datos, obtenemos:

$s'(t) = 0$ m/s en el momento indicado.

c) El área superficial de la caja es:

$$A(t) = 2\, x(t) \cdot y(t) + 2\, x(t) \cdot z(t) + 2\, z(t) \cdot y(t).$$

Derivar y reemplazar. Se obtiene:

$A'(t) = 0$ m^2/s en el momento indicado.

5) Calcular

No se vuelve a x

$$\int_0^1 \frac{5x^3}{(x^4+1)^2}\, dx = \frac{5}{4}\int_1^2 \frac{1}{u^2}\, du = \overbrace{\frac{5}{4}\left[-\frac{1}{u}\Big|_1^2\right]}$$

$$= \frac{5}{4}\left[-\frac{1}{2} + 1\right] = \frac{5}{8}.$$

$u = x^4 + 1$

$du = 4x^3\, dx \Rightarrow x^3\, dx = \frac{1}{4}\, du$

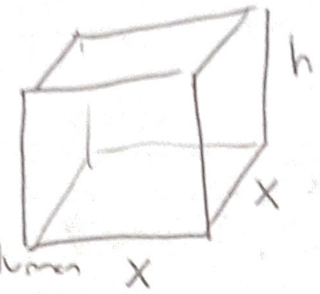
cambiamos los extremos:

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$x = 1 \Rightarrow u = 2.$

⑥ La empresa donde trabaja le ha solicitado construir un tanque rectangular de base cuadrada y con tapa, con capacidad de 500 m^3. Determine las dimensiones del tanque para minimizar la cantidad de material.

Solución:



Usemos el dato del volumen

$$V = x^2 \cdot h = 500 \ m^3$$

$$\boxed{h = \frac{500}{x^2}}$$

La función a minimizar es el área superficial:

$$A = 2x^2 + 4xh \quad \text{(depende de dos variables)}$$

Reemplazando h:

$$A(x) = 2x^2 + \frac{2000}{x}$$

Derivemos:

$$A'(x) = 4x - \frac{2000}{x^2} = 0$$

$$4x^3 = 2000$$

$$x^3 = 500$$

$$\boxed{x = \sqrt[3]{500}} \leftarrow \text{Punto crítico.}$$

Calculemos A'' y veamos el signo en $x = \sqrt[3]{500}$:

$$A''(x) = 4 + \frac{4000}{x^3}, \quad A''(\sqrt[3]{500}) > 0.$$

Luego, por el criterio de la derivada segunda,

A tiene un mínimo en $x = \sqrt[3]{500}$.

Así, las dimensiones pedidas son:

$$x = \sqrt[3]{500}\ m$$

$$h = \frac{500}{\left(\sqrt[3]{500}\right)^2} = \sqrt[3]{500}\ m.$$