# Álgebra Lineal - UNCuyo - 2024

# Trabajo Práctico 5

## Autovalores y autovectores

1. Compruebe que $\lambda$ es un autovalor de $A$ y $x$ es un autovector correspondiente y grafique.

   *a*) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\lambda = -1$, $x = (0, 1)$ *b*) $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\lambda = 2$, $x = (5, 2)$

2. Determine si $x$ es un autovector de $A$.

   $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $x = (2, -4, 6)$, $x = (2, 0, 6)$, $x = (2, 2, 0)$, $x = (-1, 0, 1)$

3. Para las siguientes matrices

   *a*) Encuentre la ecuación característica.

   *b*) Encuentre los autovalores y autovectores.

   *c*) Encuentre los autoespacios y una base.

   $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. *a*) Demuestre que para una matriz $A$ con $\lambda$ como un autovalor de $A$ con autovector correspondiente $x$ y $k = 2$, se cumple que $\lambda^k$ es un autovalor de $A^k$ y $x$ es un autovector correspondiente.

   *b*) Encuentre autovalores de $A^{12}$ para

   $$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   *c*) Para la misma matriz $A$, encuentre autovalores de $A^{-1}$

   *d*) Para la misma matriz $A$, encuentre autovalores de $A^{-8}$ (Ver ejercicio 13).

5. Si los autovalores de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$. Razonar sobre los posibles valores de $a$ y $d$.

6. Determine los autovalores de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

## Diagonalización

7. Compruebe que $P$ diagonaliza a $A$.

   *a*) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   *b*) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

8. Compruebe que la matriz dada no es diagonalizable.

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

9. Encuentre, si existe, la matriz $P$ que diagonaliza a $A$.

   a) $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

   d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

10. Halle las potencias indicadas.

    a) $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^5$.

    b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A^8$.

11. Sea $P(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 3)^3(\lambda - 0,3)$ el polinomio característico de la matriz $A$. Complete las siguientes proposiciones para que resulten verdaderas

    a) El orden de la matriz $A$ es ..........................................................

    b) $\det(A - 3I) =$ ..........................................................

    c) Los valores característicos de $B = 5A$ son ..........................................

    d) Los valores característicos de $A^T$ son ..........................................

    e) $\det(A^T) =$ ..........................................................

    f) Si $M$ es una matriz semejante a $A$, los valores característicos de $M$ son ..............

    g) ¿$A$ es inversible? ......, porque ..............................................

    h) En caso de ser inversible, los valores característicos de $A^{-1}$ son ......................

    i) Los valores característicos de $A^4$ son ..........................................

## Demostraciones

12. Demuestre que la ecuación característica de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se puede expresar como $\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$, donde $tr(A) = a + d$ es la traza de $A$. Dar una expresión para los autovalores de $A$.

13. a) (∗) Demuestre, utilizando inducción, que para una matriz $A$ con $\lambda$ como un autovalor de $A$ con autovector correspondiente $x$ y $k$, entero positivo, se cumple que $\lambda^k$ es un autovalor de $A^k$ y $x$ es un autovector correspondiente.

    b) Demuestre que si $\lambda$ es un autovalor de una matriz inversible $A$ y $x$ es un autovector correspondiente, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un autovalor de $A^{-1}$ y $x$ es un autovector correspondiente.

    c) (∗) Demuestre que si $\lambda$ es un autovalor de una matriz inversible $A$ y $x$ es un autovector correspondiente, entonces $\frac{1}{\lambda^k}$ es un autovalor de $A^{-k}$ y $x$ es un autovector correspondiente.

14. Sea $P$ una matriz que diagonaliza a $A$, de tamaño $n \times n$, de manera que $P^{-1}AP = D$. Demuestre que para un entero positivo $k$, se tiene

    *a*) $D^k = P^{-1}A^kP$

    *b*) $A^k = PD^kP^{-1}$