Análisis Matemático I
Clase 23: Series Numéricas e introducción a Series de Taylor

Pablo Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Junio, 2024

Comenzamos con una sucesión de números reales

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Deseamos extender el concepto de suma finita de números a **sumas infinitas**.

Idea y definición de Serie: Consideramos las siguientes *sumas parciales*

1. $s_1 = a_1$
2. $s_2 = a_1 + a_2$
3. $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
4. $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
5. $\vdots$
6. $s_N = a_1 + \cdots + a_N$
7. $\vdots$

Series

Así, hemos construído una nueva sucesión

$$\{s_N\}_{N=1}^{\infty},$$

denominada sucesión de sumas parciales. La sucesión de sumas parciales se denomina **serie** y se simboliza

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Si:

$$\lim_{N\to\infty} s_N$$

existe, entonces decimos que la **suma** de $\{a_n\}$ es el valor del límite y escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} s_N.$$

En este caso, decimos que la serie converge. Si el límite de las sumas parciales no existe, entonces decimos que la serie diverge.

Ejemplo: considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Observar que

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Para saber si converge, planteamos la sucesión de sumas parciales

Ejemplo: considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Observar que

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Para saber si converge, planteamos la sucesión de sumas parciales

1. $s_1 = 1 - \frac{1}{2}$
2. $s_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$
3. $s_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$
4. $s_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{5}$
5. $\vdots$
6. $s_N = 1 - \frac{1}{N+1}$
7. $\vdots$

Así

$$\lim_{N\to\infty} s_N = 1$$

Por lo tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

converge y podemos escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Serie geométrica

Una serie geométrica tiene la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots .$$

El número r recibe el nombre de razón. Este número puede ser positivo, negativo o cero.

Serie geométrica

Una serie geométrica tiene la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots .$$

El número r recibe el nombre de razón. Este número puede ser positivo, negativo o cero.

Otra forma de escribir la serie geométrica es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots .$$

La serie geométrica es muy importante, veremos algunas aplicaciones más adelante en la teoría de aproximación de funciones.

Sea la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}.$$

Entonces la suma parcial n-ésima es:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}.$$

Si multiplicamos la expresión anterior por r obtenemos:

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n.$$

Luego:

$$s_n - rs_n = a - ar^n = a(1 - r^n),$$

así, si $r \neq 1$:

$$s_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}.$$

Serie geométrica: convergencia y divergencia

Si $|r| < 1$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}\right) = \frac{a}{1-r}.$$

Luego, si $|r| < 1$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

Si $|r| > 1$, entonces la serie diverge.
Pregunta para el estudiante: ¿Qué sucede cuando $r = 1$ o $r = -1$? Debe convencerse que en esos casos también diverge (excepto cuando $a = 0$).

Ejemplo: analizar la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

Ejemplo: analizar la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

Solución: observar que la serie es una serie geométrica con $a = 1/3$ y razón

$$r = \frac{1}{5}.$$

Como $|r| < 1$, la serie dada converge y, de hecho, converge a

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{12}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{5}{12}.$$

Combinación de series

Volviendo al contexto general de series, tenemos el siguiente resultado.

Teorema

Sean $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$ dos series convergentes. Entonces:

- La serie $\sum_n (a_n + b_n)$ converge a $\sum_n a_n + \sum_n b_n$.
- La serie $\sum_n (a_n - b_n)$ converge a $\sum_n a_n - \sum_n b_n$.
- Si $k \in \mathbb{R}$, entonces la serie $\sum_n (k a_n)$ converge a $k \sum_n a_n$.

Ejemplo: estudiar la convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right).$$

Criterios de Convergencia

En muy pocos casos es posible hallar una expresión de las sumas parciales de una serie. En vista de lo estudiado anteriormente, la serie geométrica es uno de esos casos.

Para la gran mayoría de las series, la convergencia se analiza mediante criterios. En este curso veremos los siguientes:

1. Criterio del término n-ésimo.
2. Criterio de la integral.
3. Criterio del cociente.
4. Criterio de Leibnitz para series alternantes.

Los criterios nos ayudan a decidir si una serie converge o no, pero no nos dice cuál es el valor de la suma.

Criterio del término n-ésimo

Comenzamos con la siguiente observación: supongamos que la serie

$$\sum_n a_n$$

converge. Entonces se espera que a medida que n aumenta, los términos a_n que se están sumando sean cada vez más chicos (si no, no tendríamos *suma* finita). De hecho, se tiene el siguiente teorema.

Teorema

Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

La forma más útil del resultado anterior es la siguiente, que constuye su contrarrecíproco y que llamaremos **Criterio del término n-ésimo.**

Criterio del término n-ésimo

Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no es cero o no existe, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

diverge.

Ejemplos: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$.
Observación: si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces no podemos emplear el criterio para decir que la serie dada converge o diverge. es necesario aplicar un criterio diferente.

Criterio de la integral

Sea a_n una sucesión de términos positivos. Supongamos que:

$$a_n = f(n),$$

donde $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función positiva, decreciente y continua para todo $x \geq 1$. Entonces:

- Si $\int_1^\infty f(x)dx$ converge, entonces $\sum_n a_n$ converge.
- Si $\int_1^\infty f(x)dx$ diverge, entonces $\sum_n a_n$ diverge.

Ejemplo: analizar la convergencia de la serie armónica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Ejemplo (lo harán en las prácticas): series p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 0.$$

Criterio de la razón

Cuando los términos de una serie contienen potencias n'-ésimas o factoriales, el siguiente criterio es muy útil.

Criterio de la razón

Sea $\sum_n a_n$ una serie dada. Sea:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Entonces:

- Si $\rho < 1$, entonces la serie converge.
- Si $\rho > 1$, entonces la serie diverge.
- Si $\rho = 1$, entonces el criterio no decide.

Mostrar por qué el criterio no decide en el último caso.
Ejemplos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{5^n}$.

Criterio de Leibniz

Cuando la serie considerada tiene términos que alternan en signos, el siguiente criterio es de gran utilidad.

Criterio de Leibniz

Sea la siguiente serie alternante:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots .$$

Entonces esta serie converge si se satisfacen las siguientes condiciones:

- Todos los términos u_n son positivos.
- u_n es una sucesión decreciente.
- $u_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Criterio de Leibniz

El criterio de Leibniz también se aplica si la serie está escrita como:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n., \quad o \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} u_n.$$

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Series de Taylor

Objetivo: dada una función f y un punto a en el interior del dominio de f, se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de f cerca de a.

Objetivo: dada una función f y un punto a en el interior del dominio de f, se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de f cerca de a.
Un ejemplo de la construcción que se desea es la **linealización** de f en a.
Recordar que:

$$f(x) \approx L(x) = f'(a)(x-a) + f(a),$$

y la aproximación mejora cuando x tiende a a. Observar que la linealización es un polinomio de grado 1 y que su utilidad radica en que es una expresión sencilla para realizar cálculos (evaluaciones en x particulares, derivación, integración, etc.).

Objetivo: dada una función f y un punto a en el interior del dominio de f, se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de f cerca de a.

Un ejemplo de la construcción que se desea es la **linealización** de f en a. Recordar que:

$$f(x) \approx L(x) = f'(a)(x-a) + f(a),$$

y la aproximación mejora cuando x tiende a a. Observar que la linealización es un polinomio de grado 1 y que su utilidad radica en que es una expresión sencilla para realizar cálculos (evaluaciones en x particulares, derivación, integración, etc.).

¿Se podrán obtener mejores aproximaciones de f aumentando el grado del polinomio de aproximación?

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón x y primer término 1.

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón x y primer término 1. Así:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots, \quad \text{cuando } |x| < 1.$$

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón x y primer término 1. Así:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots, \quad \text{cuando } |x| < 1.$$

La serie anterior **está centrada en** $a = 0$ pues contiene potencias de $x - 0$ y converge en el intervalo $(-1, 1)$ (centrado en 0). Decimos que $(-1, 1)$ es el intervalo de convergencia y $R = 1$ es el radio de convergencia.
Además, las sumas parciales de la serie son polinomios:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + x^2$$

$$\vdots$$

Series de Taylor

En general, la suma parcial n-ésima será:

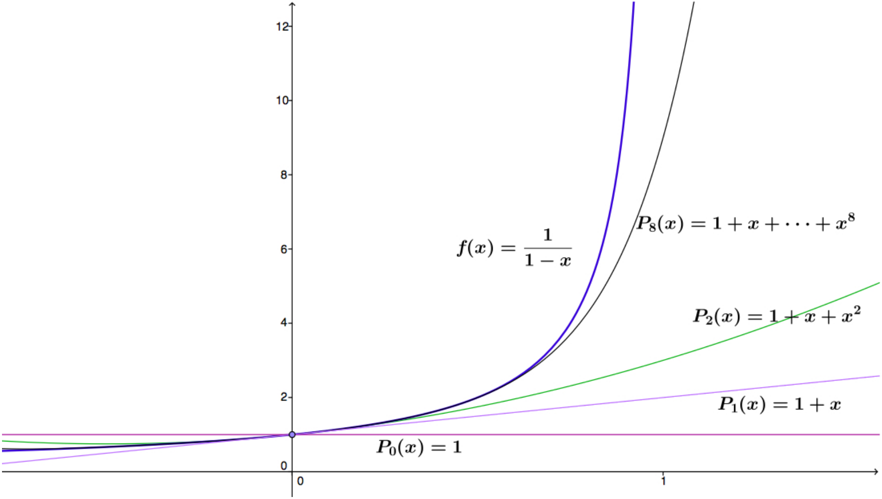
$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ converge a $f(x)$, entonces tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x), \qquad |x| < 1.$$

Así, a medida que n es mayor, el polinomio P_n aproxima mejor a f cerca de $a = 0$.

Series de Taylor



A lo largo de la clase (y la siguiente) vamos a estudiar:

- Dada una función f y un punto a en el interior de su dominio, generar una serie en potencias de $x - a$, con sumas parciales dadas por polinomios. Dicha serie se llamará **serie de Taylor** centrada en a generada por f.

A lo largo de la clase (y la siguiente) vamos a estudiar:

- Dada una función f y un punto a en el interior de su dominio, generar una serie en potencias de $x - a$, con sumas parciales dadas por polinomios. Dicha serie se llamará **serie de Taylor** centrada en a generada por f.
- Estudiar condiciones que garanticen que la serie de Taylor centrada en a hallada en el ítem anterior converge, en cierto intervalo, a la función original. De esta forma, las sumas parciales de la serie de Taylor serán buenas aproximaciones de f cerca del punto a.