ANÁLISIS MATEMÁTICO I

GUÍA DE SITUACIONES APLICADAS

FACULTAD DE INGENIERÍA

2021

Prólogo

En la presente Guía de Situaciones Aplicadas, el estudiante de Ingeniería encontrará una serie de planteos en donde aplicará diversos conceptos del Análisis Matemático 1 a través de un enfoque basado en el desarrollo de Competencias. Las situaciones planteadas constituyen aproximaciones y simplificaciones de problemas provenientes del ámbito disciplinar y/o laboral de las carreras de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo. Por ende, su resolución será guiada por los docentes de la cátedra, teniendo en cuenta los objetivos y resultados esperados. Esto resulta fundamental ya que algunas de las situaciones planteadas pueden tener formas de resolución alternativas o no adecuadas para el nivel del curso.

El objetivo fundamental de la Guía es que el estudiante estimule y acreciente su capacidad de abstracción, analice diversos factores y variables en un determinado fenómeno o situación problemática, construya modelos matemáticos sencillos y, finalmente, aplique las técnicas aprendidas en el curso de Análisis Matemático 1 para resolver el problema planteado, evaluando con espíritu crítico sus conclusiones y resultados. Así, se mostrará al estudiante algunas de las muy diversas aplicaciones de los conceptos, métodos, técnicas y procedimientos adquiridos en Análisis Matemático.

Por último, los autores desean agradecer a las autoridades de la Facultad de Ingeniería por el apoyo brindado.

Dr. Pablo Ochoa
Dra. Mercedes Larriqueta
Prof. Noemí Vega
Lic. Martín Matons
Ing. Paula Acosta
Dra. Dalía Bertoldi
Dra. Stella Donato
Dr. Hernán Garrido
Ing. Julián Martínez
Lic. Verónica Nodaro

Una Guía enfocada en el desarrollo de Competencias[1]

Hasta hace algún tiempo, la gran discusión en la enseñanza de las ingenierías estaba centrada en

Competencias Sí versus **Competencias No**.

Sin embargo, a partir de la aprobación de la Propuesta de Estándares de Segunda Generación para la Acreditación de las Carreras de Ingeniería por el Consejo Federal de Decanos de ingeniería (CONFEDI) en 2018, las grandes discusiones deben enfocarse en *cómo* adecuar e implementar los Planes de Estudio de las distintas carreras de Ingeniería al nuevo contexto.

Uno de los pilares fundamentales del nuevo proceso de enseñanza es el siguiente:

La Formacón por Competencias no es un destino, es un *Camino*.

Es decir, la Formación por Competencias consiste en una mejora continua del Proceso de Enseñanza, en busca de la excelencia. Para enfatizar este aspecto, tomamos a continuación la definición de Ingeniería como profesión realizada por el CONFEDI:

Ingeniería *es la profesión en la que el conocimiento de las ciencias matemáticas y naturales adquiridas mediante el estudio, la experiencia y la práctica, se emplea con buen juicio a fin de desarrollar modos en que se puedan utilizar, de manera óptima, materiales, conocimiento, y las fuerzas de la naturaleza en beneficio de la humanidad, en el contexto de condiciones éticas, físicas, económicas, ambientales, humanas, políticas, legales, históricas y culturales.*

La Práctica de la Ingeniería comprende el estudio de factibilidad técnico-económica, investigación, desarrollo e innovación, diseño, proyecto, modelación, construcción, pruebas, optimización, evaluación, gerenciamiento, dirección y operación de todo tipo de componentes, equipos, máquinas, instalaciones, edificios, obras civiles, sistemas y procesos. Las cuestiones relativas a la seguridad y la preservación del medio ambiente constituyen aspectos fundamentales que la práctica de la ingeniería debe observar.

La definición de Ingeniería y Práctica de la Ingeniería brindan la descripción conceptual de las características del graduado y constituyen la base para el análisis de las cuestiones atinentes a su formación. Esto lleva a la necesidad de proponer un currículo con un

[1]El marco conceptual de esta sección ha sido extraído del material del curso de posgrado 'Formación por competencias, aprendizaje centrado en el estudiante y estándares de acreditación de segunda generación para Ingeniería', cuyos autores son V. Kowalski, D. Morano, I. Erck, S. Cirimelo y H. Enríquez'.

balance equilibrado de competencias y conocimientos académicos, científicos, tecnológicos y de gestión, con formación humanística.
Los graduados de carreras de ingeniería deben tener una adecuada formación general, que les permita adquirir los nuevos conocimientos y herramientas derivados del avance de la ciencia y tecnología. Además, deberán completar y actualizar permanentemente su formación a lo largo de la vida laboral, en el marco informal o en el formal a través del postgrado. (Libro Rojo, CONFEDI, 2018).

Así, la Universidad cuando forma profesionales lo hace buscando que éstos puedan resolver los problemas de la sociedad que se encuentran dentro de su campo de actuación. Entonces ser Competente como profesional tiene que tener como norte resolver Problemas Profesionales, o Situaciones Profesionales, si se lo quiere poner en términos de la definición de Competencia de CONFEDI que citamos a continuación:

> Competencia: es la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores, permitiendo movilizar (poner a disposición) distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales (CONFEDI, 2006).

A modo de síntesis, la definición de Competencia dada por el CONFEDI, y también por diversos autores, presentan las siguientes características:

- El fin último está en la resolución de problemas profesionales;
- Los problemas de índole profesional implican situaciones complejas con un contexto específico;
- La competencia adquirida se demuestra a través de la actuación, movilización y articulación de saberes y tiene un carácter finalizado;
- Poseer una competencia implica los ámbitos cognitivo, motriz, social, político y actitudinal;
- La competencia debe ser evaluable, directa o indirectamente, y de forma gradual;
- En la formación del ingeniero, debe haber situaciones de ingración programadas.

Como se mencionó anteriormente, una de las facetas de la Competencia es la de movilizar y articular saberes para resolver un determinado problema. Así, ser competente significa, entre otras cosas, movilizar recursos, y para ello debe haber una razón para hacerlo. Los saberes y recursos se movilizan porque hay una necesidad, un problema o situación que necesita ser resuelta. Entonces, la competencia se demuestra a través de la actuación, y es por ello que tiene un carácter finalizado.

En la cátedra de Análisis Matemático I proponemos contribuir a las competencias que el estudiante de Ingeniería debe desarrollar, siguiendo los lineamientos planteados anteriormente. Entre las competencias, genéricas y específicas, detalladas en el Libro Rojo del CONFEDI a las que contribuye la presente Guía de Situaciones y el proceso de evaluación asociado, mencionamos:

Competencias genéricas:

- Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería.
- Utilizar de manera efectiva técnicas y herramientas de aplicación en ingeniería.
- Desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo.
- Comunicarse con efectividad.
- Aprender de forma continua y autónoma.

Competencias específicas de las carreras de Ingeniería Civil, Industrial y Petróleo:

- **Medir, calcular** y representar obras construidas y por construirse.
- Planificar, diseñar, **calcular** y proyectar obras e instalaciones para almacenamiento, captación, tratamiento y distribución de sólidos, líquidos y gases.
- Diseñar, proyectar, **calcular, modelar** y planificar las operaciones y procesos de producción, distribución y comercialización de productos.
- Diseñar, proyectar, **calcular, modelar** y planificar las instalaciones requeridas para la producción, distribución y comercialización de productos.
- Diseñar, gestionar, **optimizar**, controlar y mantener las operaciones requeridas para la producción, distribución y comercialización de productos.

Competencias específicas de las carreras de Ingeniería Civil, Industrial y Petróleo:

- Identificar, **formular y resolver** problemas relacionados a la exploración y explotación de yacimientos de petróleo y gas analizando alternativas y concibiendo soluciones tecnológicamente adecuadas utilizando diseños experimentales, modelos matemáticos y/o cálculos.
- Diseñar, **calcular** y proyectar instalaciones de tratamiento, transporte, almacenaje de petróleo y gas aplicando principios de cálculo, diseño y simulaciones para valorar y optimizar con sentido crítico e innovador, con responsabilidad profesional, compromiso social y ética.
- **Estimar** y evaluar recursos y reservas de hidrocarburos para su certificación utilizando software y datos.

El objetivo de la Guía es presentar problemas o situaciones significativas para el estudiante, con el fin de que movilice y articule saberes y recursos estudiados durante el cuatrimestre en la asignatura. La premisa fundamental es la siguiente:

Solamente se determinará si alguien es competente una vez que haya actuado.

La visión que compartimos en la cátedra es que los saberes (en sus distintas facetas de Ser, Hacer y Conocer) constituyen recursos o herramientas, los cuales tiene un valor reducido si el futuro profesional, hoy estudiante, no logra articularlos y movilizarlos para resolver situaciones complejas. Así, se busca contribuir a que el estudiante ponga en práctica una combinación apropiada de recursos (conocimientos, saberes hacer, habilidades, razonamientos, comportamientos, etc.) para iniciar su camino hacia un futuro profesional competente.

La presente Guía constituye una instancia programada que necesariamente involucra la integración de recursos. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que por el lugar inicial que ocupa la asignatura en el trayecto de las carreras, las situaciones de integración planteadas en la Guía son versiones simplificas de problemas ingenieriles que pueden presentarse en el ámbito profesional. Finalizamos recordamos la siguiente máxima de la Ingeniería:

Ingeniería es Verbo.

Índice de Situaciones Aplicadas

Situación 1: Apuesto a que, a largo plazo, pierdes

Bloques temáticos implicados en el problema

- ◇ Modelación matemática
- ◇ Derivadas y Análisis de Gráficas
- ◇ Extremos

Introducción

En un juego de apuestas como máquinas que simulan una ruleta francesa, las tenencias del jugador y de la banca (de la máquina) se pueden modelar como *caminos aleatorios*. Al menos en este contexto, un camino aleatorio se puede definir como una sucesión de sumas parciales donde la sucesión generadora es un número aleatorio que puede ser negativo (gana el jugador) o positivo (gana la banca).

La tenencia de la banca luego de n rondas es:

$$B_n = B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

y la del jugador correspondiente es:

$$J_n = J_0 + \sum_{k=1}^{n} -a_k,$$

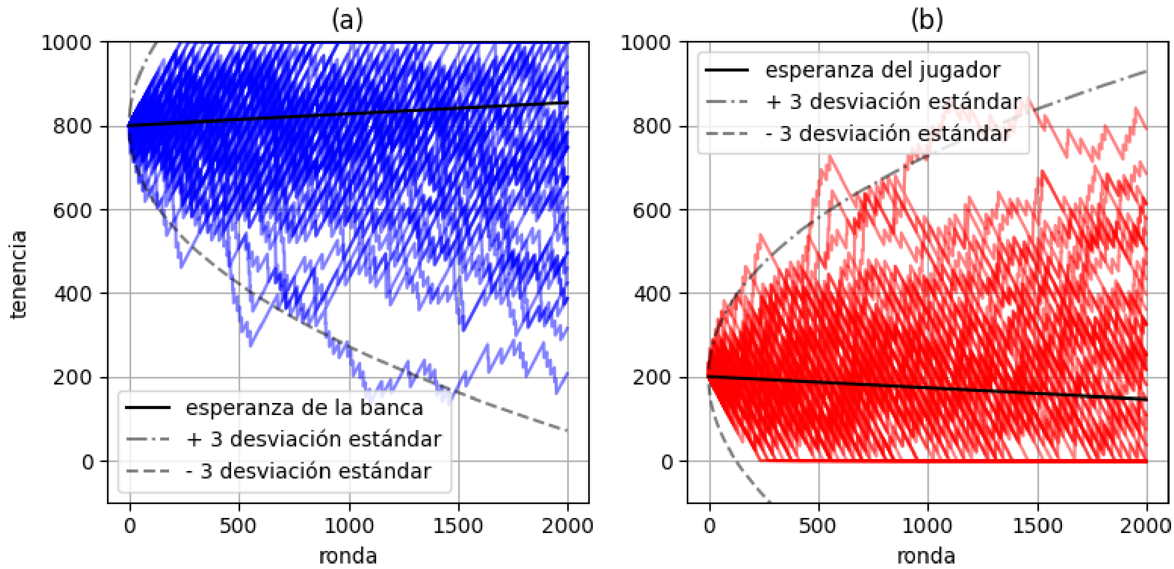


Figura 1: Simulaciones de juegos de 100 máquinas.

donde J_0 es la tenencia inicial del jugador y B_0 la tenencia inicial de la banca. Estos modelos son válidos siempre y cuando no haya quebrado ni el jugador ($J_n > 0$) ni la banca ($B_n > 0$).

Planteo

Supongamos que se trata de una ruleta con números del 1 al 36, más el 0; y apuestas de 1 unidad. El jugador puede apostar por cualquier número positivo. Si sale el número elegido por el jugador, la banca le paga 36 veces, es decir $a_k = -35$. Si sale cualquier otro número, el jugador pierde lo que había apostado, es decir $a_k = 1$. La probabilidad de que gane el jugador es:

$$P_J = \frac{1}{36+1},$$

y la de que gane la banca es:

$$P_B = \frac{36}{36+1}.$$

Suponga que usted trabaja para el dueño de 100 máquinas, las cuales tienen un día de trabajo típico como el de la figura.

En función de J_0 y B_0, se puede saber cuándo empiezan a quebrar los jugadores y cuándo empiezan a quebrar las bancas. Hay tres formas de saber esto:

1. empíricamente: se hacen apuestas con jugadores y dinero real y se registran J_n y B_n;

2. computacionalmente: se hacen simulaciones por computadora (las curvas rojas y azules de la figura fueron generadas así); o
3. analíticamente: se utiliza Análisis Matemático I y nociones de Probabilidad y Estadística para construir funciones que envuelven a la mayoría de los casos (como las curvas grises en la figura).

Enunciado

Suponga que en su trabajo le piden dejar de utilizar las formas 1 y 2 porque cuestan mucho dinero. Usted debe construir funciones que envuelvan la mayoría de los casos analíticamente. Para ello puede usar las siguientes definiciones y propiedades.

Definiciones

1. Variable aleatoria: En probabilidad y estadística, es una función que asigna un valor, usualmente numérico, al resultado de un experimento aleatorio. Por ejemplo, los posibles resultados de apostar una unidad en la ruleta: 35 o -1 (variable aleatoria discreta); o un número real, por ejemplo la temperatura máxima medida a lo largo del día en una ciudad concreta (variable aleatoria continua).
2. Esperanza: Es el valor medio de una variable aleatoria. En el caso de una variable aleatoria discreta X (que puede tomar uno de un conjunto finito de m valores posibles $x_1, x_2, ..., x_m$), es:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i),$$

   donde $P(X = x_i)$ es la probabilidad de que $X = x_i$. En nuestro caso nos dará una idea de cuánto gana en promedio la banca por cada ronda, en el largo plazo.
3. Varianza: Es una medida de la dispersión de la variable aleatoria alrededor de su media y se calcula como:

$$\sigma^2(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - E(X))^2 \, P(X = x_i).$$

   En nuestro caso nos dará una idea de cuánto es el riesgo que corre la banca de perder, en el corto plazo.

Propiedades

1. La esperanza de una constante es la misma constante:

$$E(B_0) = B_0$$

2. La esperanza es aditiva:
$$E(B_n) = E(B_{n-1}) + E(B_n - B_{n-1})$$
3. La varianza de una constante es nula:
$$\sigma^2(B_0) = 0$$
4. La varianza es aditiva:
$$\sigma^2(B_n) = \sigma^2(B_{n-1}) + \sigma^2(B_n - B_{n-1})$$
5. La esperanza de los ingresos a la banca es igual para todas las rondas:
$$E(a_k) = 1 \cdot P_B - 35 \cdot P_J$$
6. La varianza de los ingresos a la banca es igual a la de los ingresos del jugador y son iguales para todas las rondas:
$$\sigma^2(a_k) = \sigma^2(-a_k) = E\left((a_k - E(a_k))^2\right)$$
$$\sigma^2(a_k) = \sigma^2(-a_k) = \left(-35 - \frac{1}{37}\right)^2 P_J + \left(1 - \frac{1}{37}\right)^2 P_B$$
7. La desviación estándar es la raíz cuadra de la varianza:
$$\sigma(B_n) = \sqrt{\sigma^2(B_n)}$$

A partir de estas propiedades, se pueden construir las siguientes funciones que envuelven la mayoría de los casos:
$$f_l(n) = E(B_n) - 3\sigma(B_n),$$
y
$$f_u(n) = E(B_n) + 3\sigma(B_n).$$

Actividades

1. *a*) Halle una expresión para las funciones $f_l(n)$ y $f_u(n)$. Luego encuentre funciones continuas y derivables (para todo $x \geq 0$) f_{lc} y f_{uc}, tales que $f_{lc}(x) = f_l(n)$ y $f_{uc}(x) = f_u(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   b) Indique la ordenada al origen de cada una e interprete su significado en este problema.
   c) Calcule los extremos y los intervalos de crecimiento de ambas funciones.
   d) Esboce una gráfica para $f_l(n)$ y $f_u(n)$ y compare con la figura 1 (a).
2. *a*) ¿A cuánto se podría bajar B_0 aún garantizando que la mayoría de las bancas no quiebren antes de 1000 rondas?
   b) ¿Luego de cuántas rondas el riesgo de quiebra de la banca es máximo?
   c) ¿Cuál es la mínima tenencia inicial de la banca que garantiza que no quiebre casi ninguna máquina?

Situación 2: Concentración de desinfectantes

Figura 2: Elemento químico Bromo

Bloques temáticos implicados en el problema

- ◇ Modelación matemática
- ◇ Tasas de cambio
- ◇ Derivadas
- ◇ Cambio exponencial
- ◇ Integrales definidas

El bromo (Br) y sus compuestos se usan como agentes desinfectantes en piscinas y en depósitos de agua potable. Los compuestos del bromo son más seguros que los conformados por cloro por la persistencia residual de estos últimos.

En disoluciones acuosas, el bromo molecular (Br_2) reacciona con el ácido fórmico. A medida que progresa la reacción, la concentración de bromo (denotada por [Br]) disminuye rápidamente y su color se desvanece. La medición de la variación de la concentración del bromo, desde un tiempo inicial t_0 hasta un tiempo final t_f, permite determinar la rapidez promedio de la reacción durante ese intervalo:

$$\text{rapidez promedio de la reacción Br}_2\text{-ácido fórmico} = -\frac{[\mathrm{Br}_2]_f - [\mathrm{Br}_2]_0}{t_f - t_0}. \qquad (1)$$

Utilizando un espectrofotómetro, se puede determinar la concentración del bromo molecular en función del tiempo. La concentración se mide en cantidad de moles.[2]

La siguiente tabla muestra algunas mediciones de la concentración de bromo molecular en una disolución acuosa para distintos momentos:

[2]El mol es la unidad con que se mide la cantidad de sustancia y es una magnitud física fundamental en el Sistema Internacional de Unidades. Dada cualquier sustancia y considerando un tipo de entidades elementales que la componen (que pueden ser átomos, molécular, iones, etc.), un mol de sustancia equivale a $6,022 \times 10^{23}$ de esas entidades elementales. Este número se conoce como el número de Avogadro.

Tiempo t (s)	$[Br_2]$ (en moles)
0	0,012
50	0,0101
100	0,00846
150	0,0071
200	0,00596
250	0,005
300	0,0042
350	0,00353
400	0,00296

Tabla 1: Valores de la concentración $[Br_2]$ para distintos momentos

Para responder las siguientes consignas utilice los datos suministrados en la Tabla 1.

1. Eligiendo escalas apropiadas, represente gráficamente la concentración $[Br_2]$ en función del tiempo t.
2. Calcule la rapidez promedio (1) en los intervalos de tiempo $[0, 50]$, $[100, 200]$ y $[0, 400]$.
3. En base a las respuestas anteriores, indique si la rapidez promedio de la reacción entre Br_2 y ácido fórmico es constante para cualesquiera de los intervalos de tiempo de la Tabla 1.

A continuación va a determinar qué tipo de variación o cambio presenta la concentración $[Br_2]$ como función del tiempo. Para ello deberá responder algunas preguntas teniendo en cuenta la relación (1) y la información suministrada en la siguiente tabla:

Tiempo (s)	$[Br_2]$ (mol)	Rapidez instantánea de la reacción (mol/s)	$k = \dfrac{\text{rapidez}}{[Br_2]}(1/s)$
0	0,012	$4{,}20 \times 10^{-5}$	
50	0,0101	$3{,}52 \times 10^{-5}$	
100	0,00846	$2{,}96 \times 10^{-5}$	
150	0,0071	$2{,}49 \times 10^{-5}$	
200	0,00596	$2{,}09 \times 10^{-5}$	
250	0,005	$1{,}75 \times 10^{-5}$	
300	0,0042	$1{,}48 \times 10^{-5}$	
350	0,00353	$1{,}23 \times 10^{-5}$	
400	0,00296	$1{,}04 \times 10^{-5}$	

TABLA 2. Valores de rapidez instantánea para la reacción Br_2-ácido fórmico.

4. Calcule la constante k para cada intervalo de tiempo. A partir de estos valores de k, ¿qué conclusión puede sacar acerca de la relación entre la rapidez de la reacción

y $[\mathrm{Br}_2]$?

5. En términos de derivadas, ¿qué expresión obtiene cuando hace:

$$t_f \to t_0$$

en el lado derecho de (1)?

6. De la información obtenida en los dos ítem anteriores, deduzca la relación:

$$-\frac{d[\mathrm{Br}_2]}{dt} = k[\mathrm{Br}_2] \tag{2}$$

El lado izquierdo de (2) (con el signo negativo incluido) se denomina rapidez de la reacción.

7. En base al inciso anterior, ¿la concentración $[\mathrm{Br}_2]$ presenta un cambio exponencial con respecto al tiempo? Justifique su respuesta.
8. Divida ambos miembros de (2) por $[\mathrm{Br}_2]$, e intégrelos con respecto al tiempo en el intervalo $[0, t]$ para obtener una expresión de $[\mathrm{Br}_2]$ como función de t. Considere que para $t = 0$, la concentración del bromo molecular es un cierto valor inicial $[\mathrm{Br}_2]_0$.
9. ¿Qué sucede con la concentración de bromo molecular a largo plazo?
10. En el análisis de reacciones químicas, un criterio para identificar si una reacción es de primer orden (es decir, la rapidez de la reacción es directamente proporcional a la concentración del reactivo) es representar el logaritmo natural de la concentración con respecto al tiempo. Observar que a partir de (2), sabemos que la reacción bromo molecular-ácido fórmico es una reacción de primer orden. Utilice la expresión de $[\mathrm{Br}_2]$ obtenida en el inciso 8 para representar $\ln[\mathrm{Br}_2]$ como función de t. ¿Qué curva obtiene? ¿Cuál es la pendiente de la curva? En general, ¿qué tipo de curva espera obtener cuando represente el logaritmo de la concentración con respecto al tiempo en reacciones de primer orden?

Referencias

-Chang, R. y College, W. *Química*, 2002, Mc Graw Hill, 7a edición.

Situación 3: Radiación de antenas de telefonía celular

Figura 3: Antena de telefonía

Bloques temáticos implicados en el problema

- ◇ Modelación matemática
- ◇ Derivada y regla de la cadena
- ◇ Optimización
- ◇ Extremos absolutos

Existe la creencia popular de que las antenas de telefonía celular son perjudiciales para la salud de las personas que viven cerca de ellas. Más allá del hecho de que no deberíamos preocuparnos, pues su fabricación está normalizada y su instalación sumamente regulada, suelen darse las siguientes argumentaciones.

Muchas personas dicen que mientras más cerca viven de una antena más potencia reciben de ella, pues la potencia recibida decae con el cuadrado de la distancia. Esto es cierto.

Por otro lado, algunos ingenieros dicen que el teléfono transmite con más potencia si se encuentra lejos de la antena que si se encuentra cerca (para economizar batería). Además, como la persona siempre está más cerca de su teléfono que de la antena, alejarse de la antena podría llevarla a recibir más potencia. Esto también es cierto.

Suponga que una unión vecinal, que se niega a dejar instalar una antena en el barrio, lo contrata a usted para conciliar estos dos argumentos *aparentemente* contradictorios pero *verdaderamente* ciertos. Le proporcionan los siguientes valores para los parámetros del problema:

- ◇ Cantidad de comunicaciones simultáneas de la antena: $N = 100$.
- ◇ Tasa de uso del teléfono: $t_{ut} = 1/(24 \cdot 60)$ (1 minuto por día).

- ◇ Tasa de uso de la antena: $t_{ua} = 16/24$ (16 horas por día).
- ◇ Distancia entre la persona y el teléfono: $d_p = 0{,}10$ m.
- ◇ Alcance de la antena: $d_{\text{máx}} = 10000$ m.
- ◇ Distancia mínima entre la persona y la antena (altura de la torre): $d_{\text{mín}} = 30$ m.

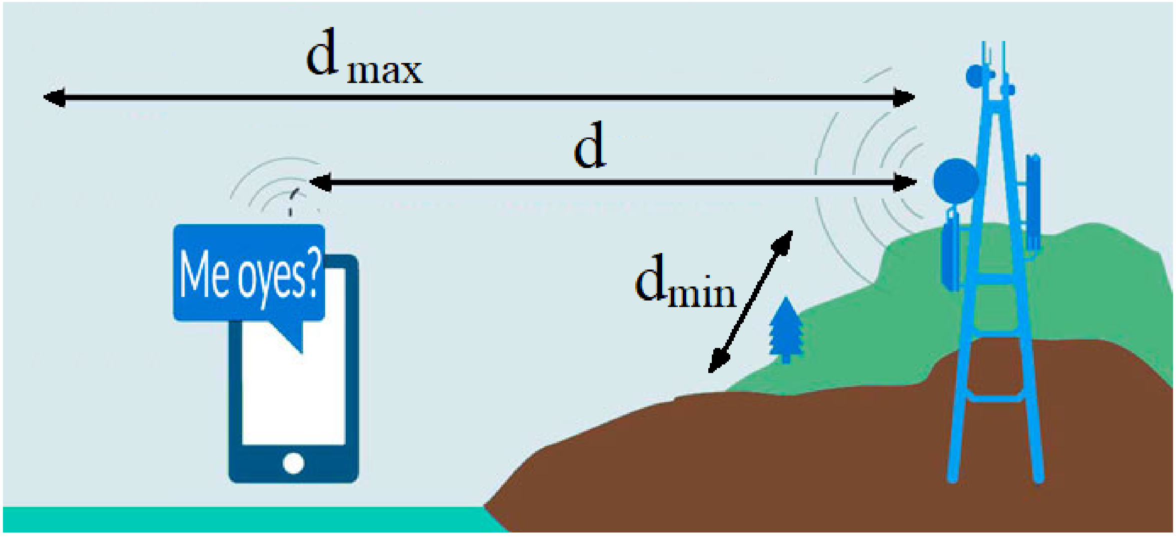


Figura 4: Esquema de torre, antena y teléfono celular.

Además, usted ha recopilado la siguiente información:

- ◇ La antena transmite siempre con la misma potencia (P_{Ta}).
- ◇ El teléfono transmite con una potencia variable (P_{Tt}) tal que la antena recibe una potencia (P_{Ra}) igual a la que recibiría el teléfono si este estuviese alejado de la antena una distancia igual al alcance de la antena ($d_{\text{máx}}$).
- ◇ La potencia recibida por la antena (P_{Ra}) es inversamente proporcional al cuadrado de distancia entre el teléfono y la antena (d), y directamente proporcional a la potencia transmitida por el teléfono (P_{Tt}); es decir, es proporcional al cociente $\frac{P_{Tt}}{d^2}$.
- ◇ La potencia recibida por el teléfono (P_{Rt}) es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el teléfono y la antena (d), y directamente proporcional a la potencia transmitida por la antena (P_{Ta}).
- ◇ La potencia media recibida por la persona (P) es la suma de dos términos (P_1 y P_2).
- ◇ El término P_1 es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el teléfono y la antena (d), directamente proporcional a la potencia transmitida por la antena (P_{Ta}), directamente proporcional al número de comunicaciones simultáneas de la antena (N), y directamente proporcional a la tasa de uso de la antena (t_{ua}).

- ◇ El término P_2 es inversamente proporcional al cuadrado de distancia entre el teléfono y la persona (d_p), directamente proporcional a la potencia transmitida por el teléfono (P_{Tt}), y directamente proporcional a la tasa de uso del teléfono (t_{ut}).
- ◇ Existe una distancia mínima a la que una persona puede estar de la antena ($d_{\text{mín}}$), la cual corresponde a la altura de la torre.

Utilizando la misma constante k para todas las relaciones de proporcionalidad mencionadas anteriormente, aborde las siguientes consignas:

1. Construya la función potencia transmitida por el teléfono $P_{Tt} = g(d)$, donde d es la distancia entre el teléfono y la antena.
2. Construya las funciones $P_1 = P_1(d)$ y $P_2 = P_2(d)$, y grafíquelas considerando que su dominio es $[d_{\text{mín}}, d_{\text{máx}}]$.
3. Construya la función $P = P(d)$ y grafíquela considerando que su dominio es $[d_{\text{mín}}, d_{\text{máx}}]$.
4. Encuentre los extremos absolutos de P en el intervalo dado y explique qué significan en el contexto del problema.
5. Compare $P(d_{\text{máx}})$ y $P(d_{\text{mín}})$ con el mínimo global de P.
6. ¿Qué tiene para decirle a quienes lo contrataron? Tenga en cuenta que tiene que explicar sus conclusiones a personas que pueden no saber Análisis Matemático.

Referencias

-https://en.wikipedia.org/wiki/Cellular_network.

-https://en.wikipedia.org/wiki/Mobile

Situación 4: Selección de un sensor para iniciar su compra

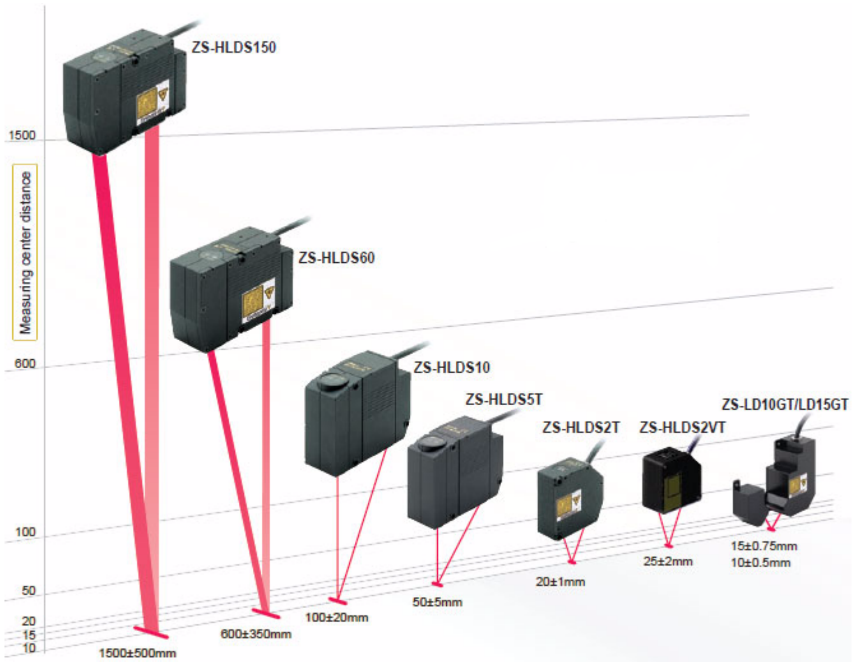


Figura 5: Sensores para medir desplazamientos

Bloques temáticos implicados en el problema

- ◇ Modelación matemática
- ◇ Funciones trigonométricas
- ◇ Derivación

Suponga que tiene que comprar un sensor de desplazamiento para medir la vibración de una máquina. Si elige un sensor con un rango muy pequeño, puede que la medición se sature (sobrepase el rango del sensor). Si, por el contrario, elige un sensor con rango muy amplio, puede que la medición sea tan pequeña que el ruido la enmascare. Por lo tanto, debe elegir el sensor con el rango más pequeño posible que cubra el rango de la medición de desplazamiento.

Desafortunadamente, usted no cuenta con mediciones previas del desplazamiento, pues aún no compran el sensor. Sin embargo, cuenta con una medición de aceleración (sí disponen de un acelerómetro en la empresa), la cual se muestra en la Figura 6. Este patrón se repite indefinidamente.

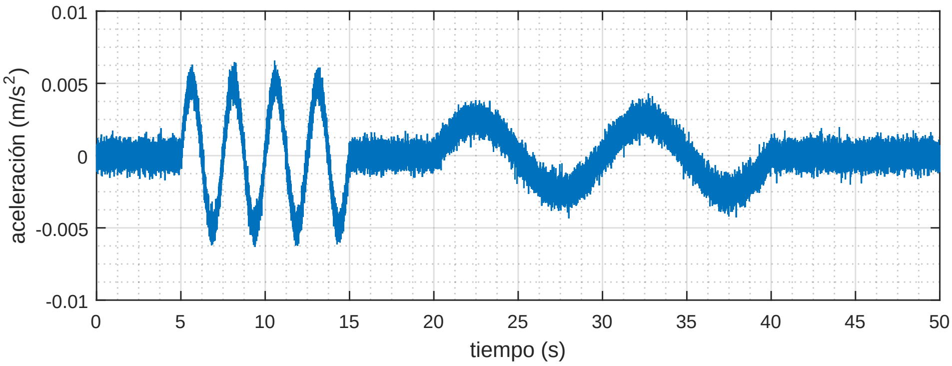


Figura 6: Registro de aceleraciones medidas.

Los sensores que puede comprar, y sus rangos correspondientes, son los que se encuentran en la Figura 8. Note que los rangos de desplazamientos (expresados en milímetros) son: $[-500, 500]$, $[-350, 350]$, $[-20, 20]$, $[-5, 5]$, $[-1, 1]$, $[-2, 2]$, $[-0{,}75, 0{,}75]$ y $[-0{,}05, 0{,}05]$, respectivamente. Para seleccionar el sensor, tenga en cuenta lo siguiente:

1. La medición de la aceleración ya tomada es aproximadamente sinusoidal de a tramos y puede escribirse, en cada tramo, en la forma
$$a(t) = A_{\text{máx}} \operatorname{sen}(\omega t),$$
donde $\omega = 2\pi f$, $f = 1/T$, T es el periodo de la oscilación y $A_{\text{máx}}$ es la amplitud máxima de la aceleración en el tramo considerado.

2. Debido a otras consideraciones, se sabe que la medición de desplazamiento a tomar también será aproximadamente sinusoidal de a tramos y puede modelarse, en cada tramo, como $d(t) = -D_{\text{máx}} \operatorname{sen}(\omega t)$, donde $D_{\text{máx}}$ es el desplazamiento máximo del tramo estudiado.

Referencia

-Thomas, G. *Cálculo, una variable*, 2010. PEARSON, 12a edición.

Situación 5: Flexion de una viga en voladizo

Figura 7: Viga en voladizo

Bloques temáticos implicados en el problema

- Modelación matemática
- Derivada y regla de la cadena
- Diferenciales
- Integrales indefinidas
- Polinomios de Taylor

En una obra en construcción se quiere armar un elevador de carga usando de apoyo una viga horizontal empotrada en un solo extremo, tal como se muestra en la Figura 8 (a). La fuerza (F) aplicada en el extremo libre provocará la flexión de la viga. Para cuantificar esta deformación, es necesario relacionar el desplazamiento (y) de la viga con el momento flector (M) causado por F. En la Figura 8 (b) se muestra la flexión que sufre un punto P que se encuentra a una distancia x del empotramiento de la viga. La cantidad ds es la longitud del arco de viga asociado a los incrementos dx y dy.

El radio de curvatura (ρ) en P se define trazando rectas tangentes y normales en puntos de la viga flexionada correspondientes a P y a un punto ubicado en $x+dx$, tal como se muestra en la Figura 9. Observar que las rectas normales se cortan en un punto C (usualmente llamado centro de curvatura en P). Para incrementos dx pequeños, la distancia entre C y cada punto del tramo de viga considerado es aproximadamente la misma. Esta distancia constituye el radio de curvatura ρ en P ($\rho(x)$). Como $d\theta$ es el ángulo entre las normales

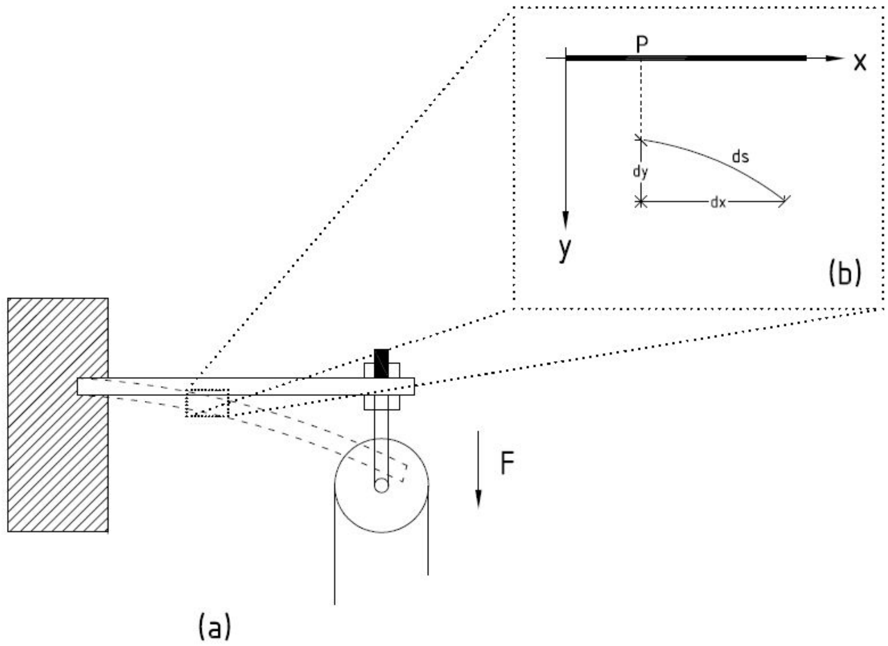


Figura 8: Flexión de la viga y punto P.

y está medido en radianes, se tiene

$$\rho(x) = \frac{ds}{d\theta}. \tag{3}$$

1. Use la fórmula (3) de ρ y aproxime ds con la hipotenusa del triángulo rectángulo (línea punteada) para deducir la conocida fórmula del radio de curvatura:

$$\rho(x) = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{4}$$

   Observe que la pendiente de la recta tangente a la curva en $(x, y(x))$ es la tangente del ángulo de inclinación θ, por lo que $y'(x) = \tan\theta$ y por lo tanto $d\theta = d(\arctan y'(x))$. En el procedimiento, deberá además usar la definición de diferencial.

2. Aproxime $\tan\theta$ con el polinomio de Taylor de orden uno (centrado en cero). Luego, teniendo en cuenta que $y'(x) = \tan\theta$ determine por qué puede considerarse que $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \simeq 1$ si las deformaciones son pequeñas. Finalmente, reescriba la ecuación (4) bajo esta suposición.

3. Por la expresión de Euler-Bernoulli, se sabe que el radio de curvatura y el momento flector están relacionados por la ecuación:

$$\rho(x) = \frac{EI}{M(x)} \tag{5}$$

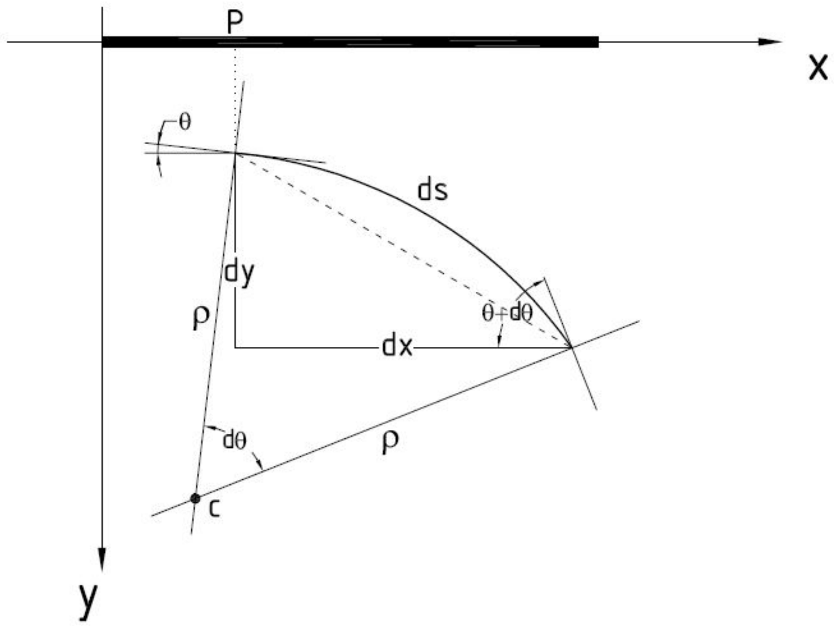


Figura 9: Flexión de la viga y punto P.

donde E es el módulo de Young del material y I el momento de inercia de la sección transversal de la viga. Obtenga una ecuación para el desplazamiento y de la viga en función de M cuando las deformaciones son pequeñas. Trate a I y E como constantes pero recuerde que M es función de x.

Referencia

-Raffo, C. *Introducción a la estática y la resistencia de materiales*, 2002, Ed. Alsina, 10a edición.

Situación 6: Flujo en un canal abierto

Figura 10: Construcción de un canal para riego

Bloques temáticos implicados en el problema

- Modelación matemática
- Derivada y regla de la cadena
- Valores extremos de funciones

Se quiere construir un canal de riego para viñedos de una importante bodega (Figura 11). Como el canal es abierto, se sabe que el flujo puede darse en tres regímenes: crítico, subcrítico (lento y tranquilo) y supercrítico (rápido y torrencial). El régimen crítico es un estado inestable poco recomendado para el diseño de estructuras hidráulicas. Es por tanto necesario obtener una ecuación característica de este régimen que permita reconocerlo y evitarlo. Posteriormente, es conveniente determinar las variables posibles de controlar con el diseño del canal para que el régimen del flujo sea supercrítico y el agua fluya rápidamente.

Si el canal funciona en régimen constante, la velocidad media del agua está dada por el cociente entre su caudal (Q) y el área de la sección transversal del canal (A):

$$v(y) = \frac{Q}{A(y)}, \tag{6}$$

donde y es la distancia desde el fondo del canal a la superficie del agua. Un concepto clave para la resolución del problema es que en el régimen crítico la energía específica (E) es mínima (cantidad de energía por unidad de peso de líquido, medida a partir del fondo del canal) y se calcula como:

$$E(y) = y + \frac{v^2(y)}{2g}, \tag{7}$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Reemplazando (6) en (7) se tiene:

$$E(y) = y + \frac{Q^2}{2gA^2(y)}.$$

1. Teniendo esto en cuenta y considerando el caudal constante, obtenga la velocidad del régimen crítico.
2. Posteriormente, suponga que dA/dy es constante y determine qué variables puede controlar para que el flujo sea supercrítico, es decir, para que la velocidad del agua sea superior a la del régimen crítico.
3. Observe la Figura 11 y determine qué geometrías del canal son posibles bajo la suposición que dA/dy sea constante. Justifique su respuesta.

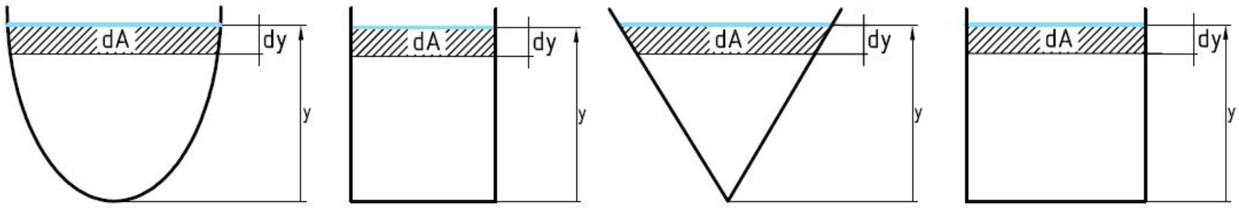


Figura 11: Secciones transversales de diferentes canales de riego

Referencias

-Silvestre, P. *Fundamentos de hidráulica general*, 1983, Ed. Limusa, 1ra edición.

-Cadavid, J. *Hidráulica de canales, fundamentos*, 2006, Ed. Universidad EAFIT, 20 edición.

Situación 7: Emplazamiento de un parque eólico

Figura 12: Parque eólico

Bloques temáticos implicados en el problema

- ◇ Modelación matemática
- ◇ Funciones definidas por partes
- ◇ Integral definida
- ◇ Antiderivadas
- ◇ Integrales impropias

Un ingeniero está interesado en el estudio de la velocidad del viento en un lugar geográfico determinado donde se emplazará un parque eólico. Su variable de interés es:

X: velocidad del viento en km/h.

Observar que X puede tener distintas realizaciones o valores numéricos. La variable X es un ejemplo de variable aleatoria. Las variables aleatorias son funciones y pueden ser discretas (cuando se pueden enumerar los valores que arroja la función, como edades, número de artículos defectuosos, etc.) o continuas (cuando la imagen de la función es un intervalo de la recta real, como peso, densidad, etc.).

Lo primero que debe responder el ingeniero es si la variable X es discreta o continua.

Un concepto muy importante asociado a las variables aleatorias continuas es el de función densidad f. Esta función proporciona un medio para determinar la probabilidad P de que los valores x de la variable bajo estudio se encuentren en un intervalo seleccionado. Esta probabilidad es el área encerrada entre la curva de la densidad y el eje x. Así:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Para que una función f sea una densidad debe cumplir:

◇ $f(x) \geq 0$ para todo valor $x \in \mathbb{R}$, y

◇ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Para determinar la función densidad que se ajusta mejor a la velocidad del viento, el ingeniero ha utilizado los datos de un año completo, proporcionados por la estación meteorológica más cercana, obteniendo así las frecuencias para cada valor de velocidad del viento registrado. Este procedimiento ha dado por resultado una representación decreciente a medida que la velocidad del viento es mayor. Basado en métodos estadísticos, el ingeniero descubre que los datos pueden modelarse mediante la distribución exponencial. La ecuación matemática de su función densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x}{\beta}}, & \text{si } x \geq 0, \beta > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \tag{8}$$

donde $k > 0$. Al parámetro β se lo conoce como la media de la variable. En la siguiente figura puede observar distintas gráficas de (8) para diferentes valores de β.

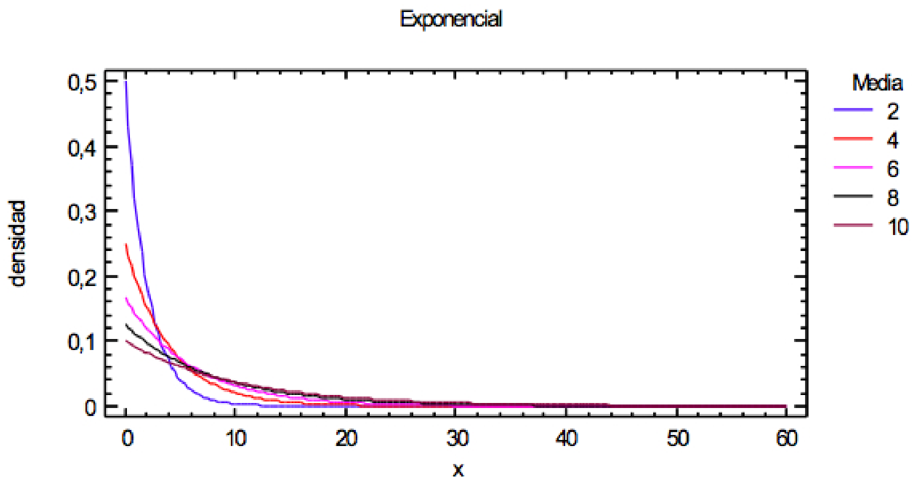


Figura 13: Distribución exponencial para distintos valores de su media β.

Usualmente se introduce el parámetro $\lambda = 1/\beta$ y entonces la función (8) puede escribirse como:

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0, \lambda > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{9}$$

1. Encuentre la relación entre k y λ para que f sea una función densidad. Reescriba la función f utilizando la relación encontrada.
2. Estime el valor del parámetro λ si los registros indican que la probabilidad de que la velocidad del viento no supere los 70 km/h en la región es 0,90. En base al inciso anterior y al valor de λ encontrado, ¿qué expresión obtiene para f en (9)?
3. Utilizando la información del inciso 1, determine la función F de distribución acumulada de la velocidad del viento:

   $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

   Observe que la función distribución acumulada F es la integral de f entre el mínimo valor de la variable X (en este caso cero) y cualquier valor x de ella. La función F se interpreta como la probabilidad de observar valores de la variable hasta uno en particular, en este caso, hasta x. En símbolos:

   $$P(X \leq x) = F(x).$$

   Como resultado se obtiene una función F que permite calcular probabilidades sin necesidad de volver a realizar la integración de f en cada ocasión.
4. Represente gráficamente la función densidad (9) y la función de distribución acumulada encontradas en los incisos 1 y 3.
5. Teniendo en cuenta que el valor esperado o media de X se define como:

   $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

   encuentre la velocidad media anual del viento en la región. A continuación, verifique la relación $\lambda = 1/\beta$ explicitada anteriormente.
6. Los generadores de energía están diseñados para operar con velocidades del viento iniciales de 14,4 km/h y llegan a la máxima producción a los 50,4 km/h. Si la operación se vuelve rentable entre los 15 y 70 km/h, ¿cuál es la probabilidad de que los generadores sean rentables?

Referencia

-Canavos, G. *Probabilidad y estadística: aplicaciones y métodos*, 1988, Ed. McGRAW-HILL, 1ra edición.

Situación 8: Medición de la velocidad de una pelota de tenis en el saque

Figura 14: Equipo de medición de velocidad

Bloques temáticos implicados en el problema

- ◇ Modelación matemática
- ◇ Tasa de cambio promedio
- ◇ Optimización

Suponga que lo contratan para configurar un equipo de medición de velocidad basado en imágenes. La configuración consiste simplemente en setear el valor de un parámetro llamado h.

El equipo toma una imagen de la pelota de tenis un tiempo antes de que se despegue de la raqueta ($t = t_0 + h$, con $h < 0$), una imagen justo en el momento en que se despega ($t = t_0$) y otra más un tiempo después de que se despega ($t = t_0 + h$, con $h > 0$). Ver Figura 17.

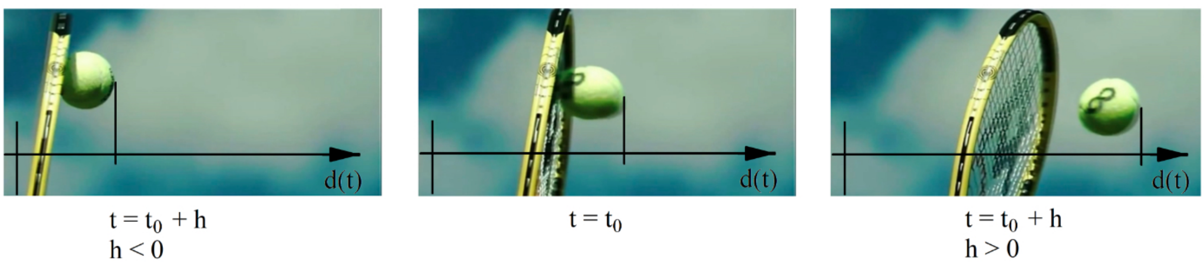


Figura 15: Imágenes de antes, durante y después de que la pelota se despega de la raqueta.

A partir de estas imágenes el equipo obtiene el desplazamiento $d(t)$ de la pelota con una resolución que se obtiene dividiendo el espacio horizontal cubierto por la cámara (1 m) por la cantidad de pixeles con los cuales lo cubre (1000 pixeles).

La raqueta modifica la velocidad de la pelota de 0 m/s a 60 m/s (aproximadamente) en 0,005 s. En el tiempo t_0 (momento en que la pelota se despega de la pelota), la velocidad de la pelota es de 60 m/s. A patir de este momento, la velocidad disminuye en 1 s de 60 m/s a un 90 % de esa velocidad.

Podemos suponer que la aceleración (que le produce la raqueta a la pelota) y la desaceleración (que le produce el aire) son aproximadamente constantes.

El manual del dispositivo especifica que éste aproxima la velocidad con la siguiente fórmula:

$$v(t_0) \approx \frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h},$$

y que dicha aproximación tiene un error cuya cota superior es:

$$e(h) = \frac{|d''(c)h|}{2} + \left|\frac{r}{h}\right|; \tag{10}$$

donde $d''(t)$ es la aceleración en función del tiempo, c es algún número perteneciente al intervalo $[t_0, t_0+h]$ (o $[t_0+h, t_0]$ si $h<0$) y r es la resolución espacial (t, t_0, h y c se miden en s; $v(t)$ y $e(h)$ en m/s; y $d(t)$ y r en m).

Para configurar el equipo usted tiene que tomar dos decisiones:

1. ¿Debería usar $h<0$, es decir medir la velocidad justo antes de que la pelota se despegue de la raqueta; o usar $h>0$, es decir medir la velocidad justo después de que la pelota se despegó de la raqueta?
2. Para el caso elegido, ¿cuál conviene que sea el valor de h?

Referencias

-Burden, R. y Faires, J. *Numerical Analysis*, 2011, Brooks/Cole, 9a edición.

-https://www.marca.com/2015/07/01/tenis/1435714847.html.

Situación 9: Selección del mejor pozo para extracción de hidrocarburos.

Figura 16: Equipo de bombeo de petróleo

Bloques temáticos implicados en el problema

- ◇ Modelación matemática
- ◇ Sumas de Riemann
- ◇ Integral definida y aplicaciones

Una importante empresa petrolera está interesada en incorporar la explotación de un nuevo yacimiento. No obstante, tiene un presupuesto limitado y tres pozos candidatos (A, B y C) de una misma unidad estratigráfica. Es por tanto necesario determinar cuál tendría mejor producción, para esto es necesario establecer con qué capacidad puede fluir el hidrocarburo en cada pozo. Un método para determinar la distribución de la capacidad de flujo es el coeficiente de Lorenz el cual requiere el cálculo del área bajo la curva de la fracción de capacidad de flujo total (f_F) versus la fracción de volumen total (f_V), donde f_F está dado por el producto de la permeabilidad del suelo y la profundidad del pozo, y f_V por el producto de la porosidad del suelo y la profundidad del pozo. Cuanto menor sea el coeficiente de Lorenz, menor será la heterogeneidad del pozo y mayor es el interés por explotar dicho pozo.

En la Tabla 3 se muestran los resultados correspondientes al pozo A.

1. Usando los datos suministrados, grafique la distribución de f_F versus f_V.
2. Utilice la información dada para tomar particiones que den origen a n subintervalos, elija como puntos muestra los extremos derechos de cada subintervalo. Luego

obtenga la suma de Riemann correspondiente.

3. El coeficiente de Lorenz (CL) se define de la siguiente forma:

$$CL = \frac{\text{Área entre la curva } f_F \text{ versus } f_V \text{ y la recta identidad}}{\text{Área bajo la recta identidad}}$$

Calcule el coeficiente de Lorenz aproximando el área de la curva f_F versus f_V con la suma de Riemann obtenida en el punto 2. Tenga en cuenta que las variables están definidas sobre el intervalo [0,1].

f_V	f_F	f_V	f_F
0.0114	0.0309	0.4887	0.8827
0.0229	0.0645	0.5186	0.8982
0.0343	0.1032	0.5394	0.9112
0.0481	0.1367	0.5601	0.9215
0.0572	0.1625	0.5831	0.9293
0.0687	0.1961	0.5969	0.9345
0.0778	0.2270	0.6153	0.9423
0.0915	0.2657	0.6453	0.9553
0.1099	0.3121	0.6637	0.9579
0.1282	0.3456	0.6959	0.9657
0.1443	0.3921	0.7143	0.9735
0.1603	0.4359	0.7351	0.9761
0.1832	0.4747	0.7627	0.9813
0.2085	0.5289	0.7811	0.9891
0.2222	0.5727	0.7996	0.9892
0.2428	0.6011	0.8249	0.9944
0.2727	0.6450	0.8456	0.9944
0.2933	0.6889	0.8756	0.9945
0.3232	0.7302	0.9078	0.9956
0.3462	0.7560	0.9263	0.9972
0.3715	0.7767	0.9470	0.9989
0.3968	0.8026	0.9608	0.9998
0.4198	0.8207	0.9746	0.9999
0.4497	0.8465	0.9885	0.9999
0.4704	0.8620	0.9954	0.9999

TABLA 3. Fracción de capacidad de flujo total versus fracción de volumen total para el pozo A

4. Finalmente, sabiendo que los coeficientes de Lorenz de los pozos B y C son 0.8886 y 0.7540, respectivamente, ¿qué pozo recomendaría Ud. explotar?

Referencia

-Martínez C. y Manuel O. *Elaboración de un algoritmo para generar mapas de heterogeneidad a partir de datos petrofísicos de un yacimiento*, 2003, Trabajo Especial de grado para optar al título de Ingeniero Geofísico. Universidad Central de Venezuela. Venezuela.

Situación 10: Fórmulas para estimar la inflación

Figura 17: Imagen ilustrativa de la inflación

Bloques temáticos implicados en el problema

- ◇ Modelación matemática
- ◇ Linealización y aproximación

Para preparar presupuestos, un ingeniero estadounidense solía estimar la inflación anual i_a (medida en porcentaje (%) de incremento de precios por año) utilizando la siguiente fórmula:

$$i_a = 12 i_m, \tag{11}$$

donde i_m es la inflación mensual (también medida en porcentaje de incremento de precios por mes). Así, por ejemplo, si la inflación mensual es del 0.1 %, la inflación anual resulta ser, estimativamente, del 1.2 %.

Cuando este ingeniero comienza a trabajar en una empresa de un país donde la inflación mensual es superior al 1 %, su fórmula presenta mucho error. Sus compañeros le indican que ellos usan la siguiente fórmula:

$$i_a = 100\left[\left(\frac{i_m}{100}+1\right)^{12}-1\right]. \tag{12}$$

En base a mediciones económicas en diversos países, se concluye que la expresión (12) estima satisfactoriamente la inflación anual.

1. Explique por qué la fórmula (11) también podría ser utilizada en países con inflación mensual $i_m \ll 1$ %, pero no es recomendable en lugares con inflación mensual elevada.
2. Para $i_m = 2$ %: ¿la fórmula (11) comete un error por defecto o por exceso? ¿Esto es así para cualquier valor de i_m? ¿Por qué?

Referencias

-http://financeformulas.net/Rate_of_inflation.html
-https://en.wikipedia.org/wiki/Fisher_equation

Situación 11: Accidente en el ensayo de la Fiesta de la Vendimia 2017

Figura 18: Fotografía del ensayo de la Fiesta de la Vendimia 2017.

Bloques temáticos implicados en el problema

- ◇ Modelación matemática
- ◇ Funciones y límites
- ◇ Asíntotas
- ◇ Linealización y aproximación

Suponga que, siendo ingeniero, usted es contratado como perito en el accidente ocurrido el 2 de marzo de 2017 en el Teatro Griego Frank Romero Day, cuando una grúa colapsó sobre las gradas y la carga que sostenía cayó sobre el escenario.

En el ensayo de la Fiesta de la Vendimia de 2017, como en años anteriores, se sostenía un peso P mediante dos grúas con sendos cables como se muestra en la Figura 18.

Suponga que la altura de las grúas es H y que están separadas por una distancia D. Además, asuma que las grúas y los cables son iguales y que la disposición es simétrica (Figura 19).

1. Determine una expresión de la magnitud f de la fuerza $\vec{f}$ ejercida por cada grúa (en la dirección de su respectivo cable) en términos de:
   a) el ángulo x que forma cada cable con la horizontal (es decir, $f = g(x)$),
   b) la altura h del peso (es decir, $f = k(h)$).
2. Encuentre los dominios de las funciones g y k. En el contexto del problema estudiado, ¿cuáles son realmente los dominios a considerar de estas funciones?

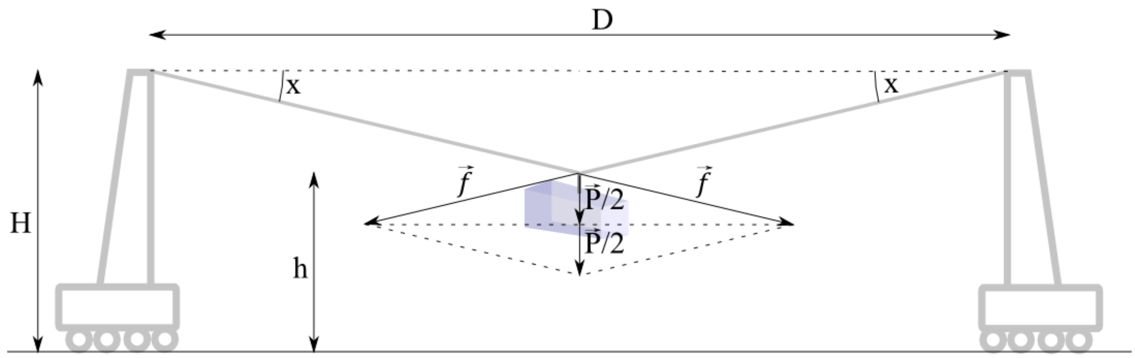


Figura 19: Esquema simplificado de fuerzas.

3. Grafique las funciones encontradas, y a partir de esto, emita un juicio criterioso sobre el riesgo de colapso de las grúas.
4. A partir de la función $f = k(h)$ y la definición de límite infinito, explique que no importa la capacidad F del tipo de grúa utilizada, siempre puede hallar una altura h que haga que vuelque. Si bien no utilizará la siguiente información, se menciona que la capacidad F viene dada por el peso propio de la grúa, patas, ruedas, anclajes, el largo del brazo y la proyección ortogonal de la fuerza $\vec{f}$ sobre el brazo.
5. Suponga que un colega le propone linealizar $f = k(h)$, para que se pueda seguir utilizando el mismo montaje en próximos eventos, y el operario de la grúa disponga de una fórmula simple para estimar si es seguro llegar hasta cierta altura. ¿Se comete un error por exceso o por defecto? ¿Esto es así para cualquier valor de h? Diga si le parece o no una buena idea usar la linealización.

Referencia

-Freeman, R. y Young, H. *Física universitaria*, 2009, Ed. Addison Wesley, 12da edición.

Situación 12: Orden de complejidad de un algoritmo

Figura 20: Código de un algoritmo

Bloques temáticos implicados en el problema

- ◇ Modelación matemática
- ◇ Sucesiones
- ◇ Notación O

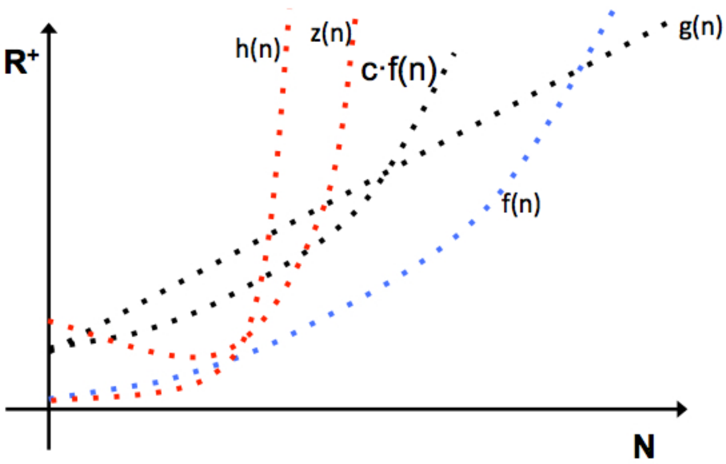
Un algoritmo es un método que se implementa en un dispositivo para resolver determinados problemas. Una vez que se dispone de un algoritmo, se definen criterios para medir su rendimiento. Estos criterios se centran en la simplicidad y en el uso eficiente de los recursos. Respecto al uso eficiente de los recursos, éste suele medirse en función de dos parámetros: la memoria que utiliza el algoritmo y lo que tarda en ejecutarse. Ambos representan los costos que supone encontrar la solución al problema mediante un algoritmo. Dichos parámetros van a servir además para comparar algoritmos entre sí, permitiendo determinar el más adecuado.

El tiempo de ejecución (T) de un algoritmo va a depender del número de operaciones elementales que realiza (operaciones aritméticas básicas, asignaciones a variables, comparaciones lógicas, etc) para un tamaño de entrada dado (n). El tamaño de entrada es el número de componentes sobre los que se va a ejecutar el algoritmo (por ejemplo, número de componentes de un vector, tamaño de matrices, etc.). Una vez que se tiene T, se puede utilizar la siguiente clase de funciones para comparar la eficiencia de algoritmos: dada $f : \mathbb{N} \to [0, \infty)$, el conjunto de funciones de orden O (Omicron) de f es:

$$O(f) = \{g : \mathbb{N} \to [0, \infty) : \text{ existen } c > 0 \text{ y } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tales que } g(n) \leq cf(n) \text{ para todo } n \geq n_0\}.$$

En lenguaje de algoritmos y estructura de datos, la notación $O(f)$ se llama orden de complejidad de f.

1. Considere el siguiente gráfico:



   a) Indique en la figura un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g(n) \leq cf(n)$ para todo $n \geq n_0$.
   b) ¿Las funciones h y z pertenecen a $O(f)$? Justifique.

2. Pruebe las siguientes propiedades de O:
   a) Si $f \in O(g)$, entonces $O(f) \subset O(g)$.
   b) Si $f \in O(g)$ y $g \in O(h)$, entonces $f \in O(h)$.

La siguiente ecuación recurrente representa un caso típico del tiempo de ejecución de un algoritmo recursivo:

$$T(n) = \begin{cases} 2n^k, & \text{si } 1 \leq n \leq 2 \\ T(n-2) + 2n^k, & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

donde k es un número natural fijo y $n = 1, 2, ...$

3. ¿Por qué se dice que T representa un algoritmo recursivo?

4. Pruebe que $T(n) = O(n^{k+1})$. Para ello, encuentre una expresión de $T(n)$ aplicando el siguiente procedimiento (su expresión de $T(n)$ va a quedar en términos de constantes C_i y D_i que no es necesario determinar para resolver el problema):

   En general, si:

$$a_0T(n) + a_1T(n-1) + a_2T(n-2) = b^nP(n),$$

   donde $P(n)$ es un polinomio de grado d, entonces primero se encuentran las soluciones r_1 y r_2 de la ecuación:

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0.$$

Si r_1 y r_2 son reales, distintas y además $r_1 \neq b$ y $r_2 \neq b$, entonces:

$$T(n) = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + D_0 b^n + D_1 n b^n + \cdots + D_d n^d b^n.$$

Si r_1 y r_2 son reales y distintas pero alguna de las dos raíces (por ejemplo r_2) es igual a b, entonces:

$$T(n) = C_1 r_1^n + D_0 b^n + D_1 n b^n + \cdots + D_d n^d b^n + D_{d+1} n^{d+1} b^n.$$

Las constantes C_i y D_i se determinan en base a los primeros valores de $T(n)$.

Finalmente, tenga en cuenta la definición del conjunto O para probar que $T(n) = O(n^{k+1})$.

5. Utilizando el procedimiento del ejercicio anterior, compruebe que el algoritmo:

$$T(n) = \begin{cases} 2n^k, & \text{si } 1 \leq n \leq 2 \\ \frac{1}{2}T(n-2) + 2n^k, & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

satisface $T(n) = O(n^k)$.

Referencia

-Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R. y Stein, C. *Introduction to algorithms*, 2009. MIT Press, 3ra edición.

Situación 13: Curva de Laffer

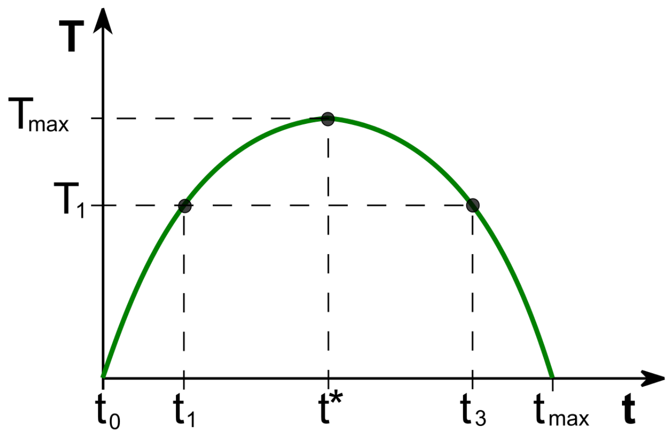


FIGURA 24. Curva de Laffer

Bloques temáticos implicados en el problema

- ◇ Modelación matemática
- ◇ Derivación
- ◇ Análisis de Gráficas
- ◇ Extremos

Introducción:

La curva de Laffer representa la relación teórica existente entre los ingresos fiscales y las tasas impositivas, mostrando cómo varían la recaudación fiscal al modificar las tasas. La curva, que fue difundida por el economista Arthur Laffer, plantea que subir la tasa del impuesto no necesariamente aumenta la recaudación, porque la base tributaria puede caer. En el punto en que la tasa impositiva es cero, los ingresos fiscales son nulos, ya que no se aplica ningún impuesto. Mientras que, por el contrario, si la tasa impositiva es del 100 por ciento, los ingresos fiscales serán nulos, que nadie aceptaría producir un bien cuyos ingresos generales fueron destinados en su totalidad a pagar impuestos.

Si en los puntos extremos de tasas impositivas (del 0 al 100 por ciento) la recaudación del gobierno es cero, surge como consecuencia que debe existir una tasa intermedia entre esos extremos que constituya una recaudación máxima posible. Teniendo en cuenta que la inflación en una economía desprecia el valor del dinero, se puede ver a la inflación como un impuesto que representa la pérdida de valor debido a ese fenómeno, que enfrentan los tenedores de los saldos reales de dinero, instrumentos financieros y los bonos. Es por ello que la curva de Laffer se puede utilizar para analizar los efectos de la variación de la inflación en una economía.

La curva de Laffer básica, se puede representar como en la Figura 24. En el eje de abscisas se sitúan las tasas impositivas posibles sobre el benefecio del producto, denotadas por t, medidas en términos relativos de 0 a 1 (es decir, del cero al 100 por ciento). Mientras que en el eje de ordenadas se encuentran los ingresos gubernamentales, en miles de millones, y son denotados por T.

Actividades:

1. Indique el dominio de la curva de Laffer
2. Explique cómo se interpreta que la curva pase por los puntos $(0,0)$, (t^*, T_{max}) y $(t_{max}, 0)$.
3. Supongamos que la curva de Laffer responde a la expresión:

$$T(t) = A + B.senh(x) + C.sec(x).$$

   a) Determine los valores de A, B y C que verifican que cuando la tasa impositiva es del 73 %, los ingresos del gobierno son de 41 mil millones.
   b) Analice el crecimiento o decrecimiento y la concavidad de la curva T en $[0, 1]$ con las constantes halladas en el inciso anterior, para comprobar que la gráfica de T tiene la forma de una curva de Laffer básica.
   c) Encuentre la tasa impositiva que permite el mayor ingreso al gobierno.
   d) Encuentre los valores de las tasas que permiten al Estado obtener una recaudación de 32 mil millones.
   e) Utilice el teorema del valor medio para integrales para encontrar el ingreso promedio entre las tasas impositivas del 25 al 75 por ciento.

Situación 14: Integración numérica

FIGURA 25. Represa

Bloques temáticos implicados en el problema

- ◇ Modelación Matemática
- ◇ Continuidad
- ◇ Integral definida
- ◇ Órdenes de magnitud
- ◇ Longitud de curva

En ocasiones se presentan en las aplicaciones integrales de funciones que no poseen antiderivada con una expresión sencilla. En tales casos es útil resolver la integral numéricamente. El **Método de Trapecios Simple** (Figura 26), que verá con detalle en la asignatura Cálculo Numérico y Computación, propone aproximar la integral de f sobre el intervalo $[x_0, x_1]$ de longitud $h = x_1 - x_0$ de la siguiente manera:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + (-\frac{1}{12})h^3 f''(\theta),$$

donde se aproxima el valor exacto de la integral I por el valor aproximado I_T:

$$I \approx I_T := \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)),$$

y el error que se comete es $Error = (-\frac{1}{12})h^3 f''(\theta)$, donde θ es cierto valor que cumple $\theta \in (x_0, x_1)$.

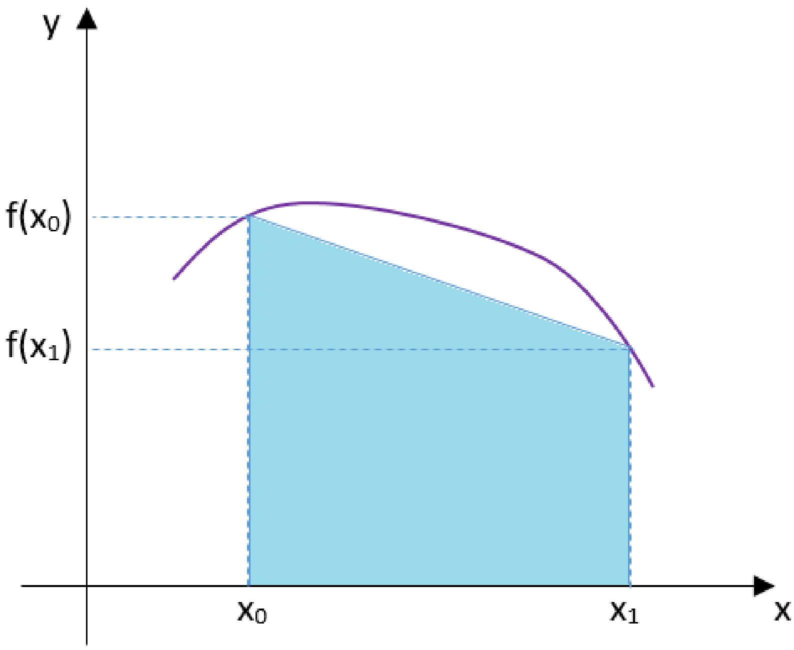


FIGURA 26. Regla de Trapecios Simple

a) Interprete geométricamente el valor $I_T = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1))$.
b) Dé dos ejemplos de integrales definidas: uno en el que I_T aproxime a I por exceso y otro, donde la aproximación sea por defecto. Analice en cada uno de ellos el signo del término de error de la fórmula, $(-\frac{1}{12})h^3 f''(\theta)$.
c) ¿Para qué tipo de funciones se puede asegurar que el error al aproximar I por I_T será nulo?

Método de Trapecios Compuesto

Para resolver

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx \tag{13}$$

numéricamente, el **método de trapecios compuesto** propone subdividir el intervalo de integración en n subintervalos $[x_0, x_0 + h]$, $[x_0 + h, x_0 + 2h]$,...,$[x_0 + (n-1)h, x_0 + nh]$[3], donde

$$x_0 + nh = x_1, \tag{14}$$

[3]La longitud de estos intervalos no necesita ser la misma, pero lo planteamos así por simplicidad.

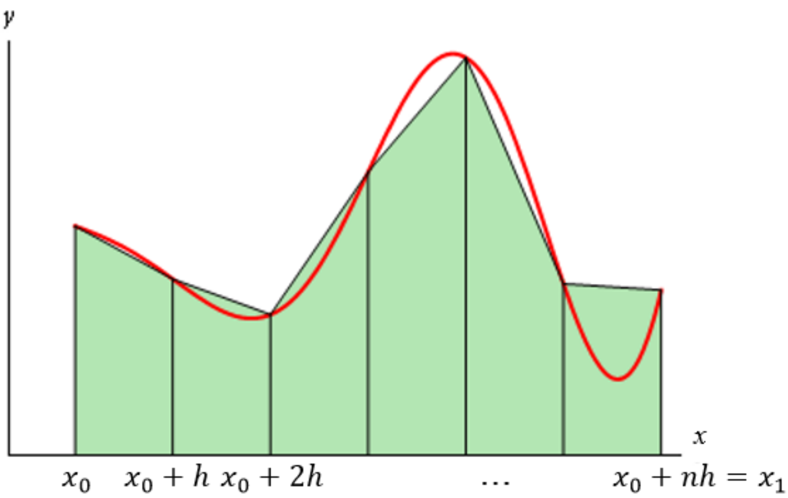


FIGURA 27. Regla de Trapecios Compuesta

y aproximar el valor de la integral (13) por la suma de las áreas de los *trapecios rectángulos* cuyas bases (ubicadas verticalmente) tienen longitudes $f(x_0)$, $f(x_0+h)$,...,$f(x_0+(n-1)h)$ y $f(x_0+nh)$, y sus alturas (ubicadas horizontalmente) tienen todas ellas longitudes h (Figura 27).

Así, se aproxima el valor de I en (13) por el de I_{TC} dado por

$$I_{TC} = \frac{f(x_0)+f(x_0+h)}{2}h + \frac{f(x_0+h)+f(x_0+2h)}{2}h + \cdots \tag{15}$$

$$+ \frac{f(x_0+(n-2)h)+f(x_0+(n-1)h)}{2}h + \frac{f(x_0+(n-1)h)+f(x_0+nh)}{2}h \tag{16}$$

d) A partir de la expresión (15), utilizando la notación sigma, halle una fórmula para hallar el valor I_{TC}.

Debe notarse que no se atraviesa ningún proceso de límite, sino que sólo se hace el cálculo aproximado. Al hacer esta aproximación, se comete un error, que se puede medir.

Igual que en el caso de la regla de trapecios simple, se puede probar que el error admite una expresión en términos de un punto ξ interior al intervalo (x_0, x_1) y del paso h elegido. Para hallar esta expresión, realice los siguientes pasos:

e) Sume los n errores provenientes de aplicar la regla de Trapecios Simple n veces, una vez en cada intervalo $[x_0+(i-1)h, x_0+ih]$, $i = 1, 2, ..., n$. Observe que cada uno de estos errores contiene en su expresión un valor $\theta_i \in (x_0+(i-1)h, x_0+ih)$, $i = 1, 2, ..., n$.

f) Justifique, indicando las condiciones que debe cumplir f'', que

$$\frac{1}{n}\left(f''(\theta_1) + f''(\theta_2) + \cdots f''(\theta_n)\right)$$

es un valor que cumple

$$\min_{[x_0,x_1]} f''(x) \leq \frac{1}{n}\left(f''(\theta_1) + f''(\theta_2) + \cdots f''(\theta_n)\right) \leq \max_{[x_0,x_1]} f''(x).$$

g) Justifique, indicando las condiciones que debe cumplir f'', que existe un valor ξ entre x_0 y x_1 tal que

$$f''(\xi) = \frac{1}{n}\left(f''(\theta_1) + f''(\theta_2) + \cdots f''(\theta_n)\right). \tag{17}$$

h) En la expresión que Ud. ha obtenido para el error en (c), haga sustituciones a partir de (17) y de (14), de manera de eliminar el factor $\frac{1}{n}$ en el error y así obtener una expresión que permita hallar el orden del error.

i) ¿Qué condiciones deben cumplirse para que este error sea un $O(h^2)$?

j) Finalmente, sin calcular el valor exacto de I, halle un valor h tal que el error al aplicar la fórmula que usted desarrolló en el ítem (d), para calcular la integral de la función $f(x) = 3 - x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$, no supere el 0.01 %, es decir, para que

$$\left|\frac{I - I_{TC}}{I_{TC}}\right| \leq 10^{-4}.$$

Aplicación: longitud del borde de una represa

k) El borde de una represa (ver Figura 25) es el arco de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{400^2} + \frac{y^2}{100^2} =, 1$$

para el cual $-100 \leq x \leq 100$, donde x e y se miden en metros. Se debe comprar materiales (en metros), en función de la longitud del arco. Haga una recomendación de cuántos metros de material se debe comprar en este caso, usando para ello un paso $h = 25$m, y gráficos de la función que debe integrar junto con los trapecios correspondientes al método (puede trabajar, por ejemplo, con Wolfram Alpha).

Situación 15: Cuando un martillo y una pluma viajaron a la Luna

FIGURA 28. Ilustración del comandante David Scott soltando una pluma y un martillo en la superficie lunar.

Bloques temáticos implicados en el problema

- ◇ Modelación Matemática
- ◇ Integrales indefinidas
- ◇ Derivadas
- ◇ Problemas de valor inicial
- ◇ Cálculo de asíntotas
- ◇ Análisis y gráfica de funciones

En 1971, el comandante David Scott, durante la misión Apolo 15 en la superficie lunar, grabó un experimento en el que dejó caer, de una misma altura, un martillo de 1,32 kilogramos y una pluma de halcón de 30 gramos. Como era de esperarse, ambos objetos cayeron al suelo simultánemanete.

La experiencia fue en homenaje a Galileo Galilei quien, tres siglos antes, había postulado que, en ausencia de la resistencia del aire, los objetos caen al mismo tiempo, independientemente de su peso. Este postulado, no fue aceptado fácilmente en su época, entre otras cosas, por la dificultad de crear condiciones de vacío.

En el informe de la misión, Scott explicó, en tono de humor, que haber observado la comprobación era algo "tranquilizador" dado que el viaje de regreso estaba basado en la validez de esta teoría.

Con las herramientas de Análisis Matemático I y las Leyes de Newton, es posible verificar este postulado de Galileo Galilei, sin necesidad de viajes espaciales.

En primer lugar, suponga que un objeto de masa m con velocidad inicial v_0 se deja caer bajo la influencia de la gravedad en la superficie terrestre. En este caso, hay dos fuerzas que actúan de forma opuesta sobre el objeto:

- la fuerza gravitatoria, dada por la expresión $F_1 = mg$, donde g es la aceleración debida a la gravedad;
- la fuerza causada por la resistencia del aire que es proporcional a la velocidad v del objeto y está dada por $F_2 = -bv(t)$, donde b es una constante positiva.

Por lo tanto, la fuerza neta sobre el objeto es:

$$F_1 + F_2 = mg - bv(t) \tag{18}$$

Teniendo en cuenta la segunda Ley de Newton $\left(\sum_i F_i = m\frac{dv}{dt}\right)$, se tiene que:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv \tag{19}$$

y la solución de esta ecuación diferencial (que aprenderá a resolver en Análisis Matemático II) es:

$$v(t) = \frac{mg}{b} + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) e^{-bt/m} \tag{20}$$

que describe la velocidad del objeto en función del tiempo.

1. Verifique que la función (20) es efectivamente la solución de la Ec. (19) y determine la condición inicial.
2. Usando la información dada, obtenga ecuaciones para la posición $x(t)$ y la aceleración $a(t)$ del objeto en función del tiempo.
3. Determine analíticamente las asíntotas de $v(t)$.
4. Grafique $v(t)$ y $a(t)$ en función del tiempo.
5. Con los cálculos hechos, ¿puede saber cuál es la velocidad terminal (cuando t tiende a infinito) del objeto?, ¿cómo influye en ella la velocidad inicial?
6. Finalmente, determine si en presencia de fricción, los objetos más pesados caen o no más rápido que los livianos. Justifique la respuesta cuando t tiende a infinito y luego, usando herramientas de Análisis, generalícela para todo tiempo t.

Suponga ahora que el objeto de masa m se deja caer en la superfice lunar donde no hay resistencia del aire.

1. Reescriba la Ec. (19) para este caso y obtenga una expresión para la velocidad.
2. Grafique $v(t)$ y $a(t)$ en función del tiempo.
3. Determine si en ausencia de fricción los objetos realmente caen con la misma velocidad, independientemente de su masa.

Situación 16: Eficiencia de un motor

FIGURA 29. Representación de un motor.

Bloques temáticos implicados en el problema

- ◇ Modelación Matemática
- ◇ Integrales definidas y Teorema Fundamental del Cálculo
- ◇ Método de sustitución
- ◇ Límites
- ◇ Valores extremos de funciones

Un motor de combustión interna se usa para generar electicidad de emergencia de un hospital que sufre frecuentes cortes de energía. Sin embargo, se desconoce la eficiencia del motor. Una forma de estimarla, es modelar el ciclo del motor a través de un ciclo de Otto como el que se muestra en la Fig. 30.

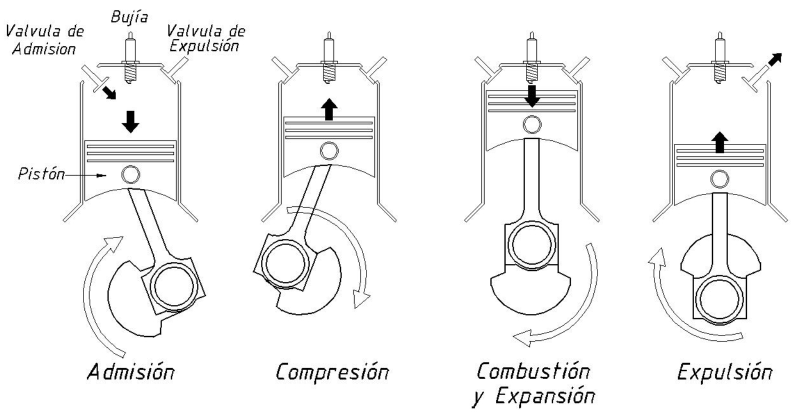


FIGURA 30. Ilustración del ciclo de cuatro tiempos de un motor de Otto.

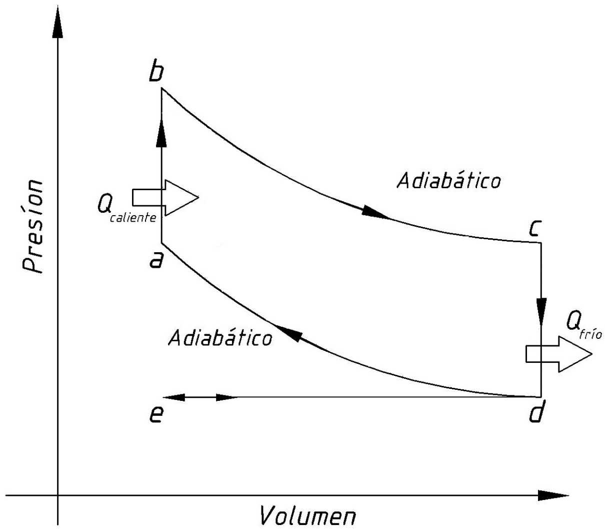


FIGURA 31. Diagrama presión (P)- volumen (V) con las distintas etapas del ciclo de Otto.

El ciclo de Otto consta de cuatro etapas:

- ◇ Etapa de admisión: La válvula de admisión se abre conforme el pistón se mueve hacia abajo, introduciendo una mezcla de combustible y aire en el cilindro. En el diagrama presión (P)-volumen (V) de la Fig. 31, es el tramo $e \to d$ que se supone que tiene lugar a presión constante.
- ◇ Etapa de compresión: La válvula de admsión se cierra y la mezcla se comprime conforme el pistón se mueve hacia arriba. Es el tramo $d \to a$ en la Fig. 31. La compresión ocurre tan rápidamente que no hay tiempo para que haya transferencia de calor entre el cilindro y el medio por lo que es un proceso adiabático (sin intercambio de calor).
- ◇ Etapa de combustión y expansión: Cuando el pistón ha alcanzado el punto más alto, la mezcla aire-combustible se inflama mediante una bujía y el rápido calentamiento que resulta del proceso de combustión hace que aumente la presión y el gas se expanda, empujando el pistón hacia abajo. La inflamación de la mezcla tiene lugar en a y el rápido aumento de presión ocurre prácticamente a volumen constante (tramo $a \to b$). El pistonazo se modela como una expansión adiabática $b \to c$.
- ◇ Etapa de expulsión: Los productos de la combustión son forzados a salir del cilindo por un movimiento hacia arriba del pistón conforme se abre la válvula de expulsión. Esta etapa ocurre en dos fases, cuando el pistón está en su punto más bajo el volumen permanece constante y es el tramo $c \to d$. Cuando el pistón empuja el gas remanente hacia arriba se sigue la línea $d \to e$ y el ciclo se cierra para comenzar de nuevo.

La eficiencia (ϵ) del ciclo se define como “lo que se obtiene"dividido “lo que cuesta obtenerlo". En este caso, lo que se obtiene es el trabajo neto útil (W) y lo que cuesta obtenerlo es el calor que se introduce por la combustión ($Q_{caliente}$), es decir:

$$\epsilon = \frac{|W|}{|Q_{caliente}|} \tag{21}$$

Por lo tanto, para evaluar la eficiencia del motor, es necesario obtener expresiones para el trabajo neto del ciclo y el calor suministrado.

1. Calcule el trabajo neto del ciclo teniendo en cuenta que si el volumen más pequeño es V_i y el más grande es V_j, el trabajo de expansión se estima como:

   $$W = -\int_{V_i}^{V_j} P(V)dV \tag{22}$$

   Por el contrario, si el trabajo es compresivo se estima como:

   $$W = \int_{V_i}^{V_j} P(V)dV \tag{23}$$

   ¿Se realiza trabajo en todas las etapas del ciclo? Interprete geométricamente el trabajo neto en el ciclo de la Fig. 31.

2. Aplicando el Teorema fundamental del Cálculo, determine la derivada del trabajo con respecto a la temperatura (V(T)):

   $$W(V(T)) = \int_{V_i}^{V} P(V^*)dV^* \tag{24}$$

   Luego, reescriba el trabajo neto obtenido en términos de T. Para ello tenga en cuenta que en los tramos adiabáticos (donde Q=0) se cumple que $dW/dT = C_V(T)$, donde C_V es el calor específico.

3. Por otro lado, se sabe que el calor que se introduce por la combustión está dado por las temperaturas en los puntos a y b del ciclo por la forma:

   $$Q_{caliente} = \int_{T_a}^{T_b} C_V(T)dT \tag{25}$$

   Usando esta expresión y el trabajo neto obtenido, de una ecuación para la eficiencia del motor en términos de T y resuelva la integral suponiendo a C_V constante.

4. De relaciones termodinámicas se puede probar que las temperaturas y volúmenes de los segmentos adiabáticos están relacionados de la siguiente manera:

   $$T_i V_i^{\gamma-1} = T_j V_j^{\gamma-1} \tag{26}$$

   donde γ es una constante. Usando esta igualdad, pruebe que el rendimiento del motor puede escribirse como:

   $$\epsilon = 1 - \frac{T_d}{T_a} \tag{27}$$

   Posteriormente, analice e interprete las situaciones en que $T_a \to \infty$ y $T_d \to 0$.

5. La temperatura de la mezcla al inicio del golpe de compresión es $T_d = 300K$, ¿cuál es la eficiencia máxima que puede tener el motor del hospital si T_a toma valores entre $400K$ y $600K$?

Situación 17: Ajuste iterativo de un equipo de fabricación aditiva

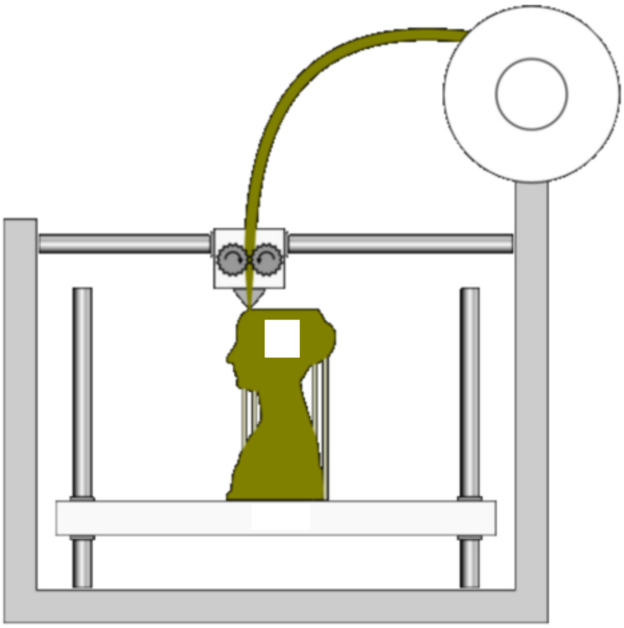


FIGURA 32. Esquema de funcionamiento de una impresora 3D.

Bloques tematicos implicados en el problema

- ◇ Modelación Matemática
- ◇ Sucesiones
- ◇ Series numéricas
- ◇ Análisis de funciones

Tres técnicos están poniendo a punto una nueva impresora 3D. Entre los parámetros que deben configurarse, se encuentra uno llamado compensación de flujo c. Este es un multiplicador que permite que el extrusor de la impresora aplique más volumen de material del que teóricamente debería (si $c > 1$) o menos (si $c < 1$). Idealmente, para que el volumen extruido V sea igual al objetivo buscado V^*, debería ajustarse $c = 1$.

Sin embargo, en la práctica existen incertidumbres, como el diámetro del filamento y resbalamiento en las ruedas del extrusor, que hacen que el valor de c necesario para que $V = V^*$ sea algún número en el intervalo $[0{,}5; 1{,}5]$. Por ejemplo, si las ruedas no resbalan, y el diámetro del filamento es mayor a lo esperado, el extrusor aportará material de más, lo cual puede compensarse fijando un valor para c un poco menor a 1. Por el contrario, el resbalamiento de la rueda puede compensarse con un valor de c un poco mayor que 1. Lo que se sabe es que $V = f(c)$, donde puede suponer que f es una función lineal que pasa por el origen con pendiente α: $f(c) = \alpha.c$.

Los tres técnicos coinciden en que hay que hacer un ajuste iterativo por prueba-y-error. Esto es:

1. Fijar un valor arbitrario para c_0 e imprimir una pieza, la cual tendrá un volumen V_0.
2. Calcular el error correspondiente $e_0 = V_0 - V^*$.
3. Con ese error calcular el valor de c para la próxima iteración, es decir c_1.
4. Repetir esto sucesivamente para $V_n, c_n, e_n = V_n - V^*$ (recordar $V_n = \alpha.c_n$), hasta que e_n sea lo suficientemente pequeño.

El problema es que cada técnico da una propuesta diferente para calcular c_{n+1} (paso 3).

1. Técnico 1 (control bang-bang):

$$c_{n+1} = c_n + a_n$$

$$a_n = \begin{cases} \beta & e_n \leq 0 \\ -\beta & e_n > 0, \end{cases}$$

con

$$\beta > 0.$$

2. Técnico 2 (control proporcional):

$$c_{n+1} = Q - \beta e_n,$$

donde

$$\beta > 0, Q > 0.$$

3. Técnico 3 (control proporcional-acumulativo):

$$c_{n+1} = c_n + a_n,$$

donde

$$a_n = -\beta e_n$$

y

$$\beta > 0.$$

Su tarea como ingeniero consiste en informar a los técnicos sobre las ventajas y desventajas de cada una de las propuestas. Para esto, debe estudiar la convergencia del error para cada una de ellas, según los valores que pueda tomar β; es decir, encontrar los casos en que la sucesión del error converge y diverge. En caso de que para alguna/s propuesta/s el error converja o pueda converger, debe calcular su límite suponiendo que $f(c) = \alpha.c$. Para calcular este límite, conviene encontrar primero una expresión cerrada para e_n en función de e_0 (donde no aparezca el símbolo de sumatoria). Puede ser de utilidad ejemplificar numéricamente. Puede usar Excel o similar.

Finalmente, tome la propuesta del Técnico 1 y además elija una de las dos propuestas restantes para desarrollarlas.

Guía para la resolución

1. Técnico 1:
   a) Primero, diga en qué intervalo puede encontrarse α.
   b) Escriba c_n utilizando la notación sigma para sumas.
   c) Determine una expresión para e_n en términos de c_0, V^* y los a_k.
   d) Analice la convergencia de los e_n cuando $n \to \infty$.
2. Técnico 2:
   a) Diga en qué intervalo puede encontrarse α.
   b) Llame r al producto $\alpha\beta$.
   c) Llame E a $\alpha Q - V^*$.
   d) Escriba c_1 y e_1 en función de e_0.
   e) Escriba c_2 en función de e_1 y luego en función de e_0.
   f) Escriba e_2 en función de c_2 y luego en función de e_0.
   g) Escriba c_3 en función de e_2 y luego en función de e_0.
   h) Escriba e_3 en función de c_3 y luego en función de e_0.
   i) Analice el patrón y escriba una posible fórmula para e_n como función de e_0. Note que uno de los términos es el enésimo elemento de una sucesión de sumas parciales.
   j) (Opcional) Escriba e_{n+1} en función de e_n, y utilice la expresión para demostrar por inducción matemática que es cierta la fórmula planteada en el inciso anterior.
   k) Calcule el límite de e_n, cuando $n \to \infty$, para distintos valores de Q, α y β.
   l) Proponga un rango para β en función del volumen objetivo que asegure la convergencia de e_n.
3. Técnico 3:
   a) Diga en qué intervalo puede encontrarse α.

b) Llame r a $1 - \alpha\beta$.

c) Escriba e_{n+1} en función de e_n.

d) Escriba e_1, e_2 y e_3 en función de e_0 (recuerde que $e_0 = \alpha c_0 - V^*$).

e) Analice el patrón y escriba una fórmula para e_n como función de e_0.

f) (Opcional) Demuestre por inducción matemática que dicha fórmula es cierta.

g) Calcule el límite de e_n, cuando $n \to \infty$, para distintos valores de α y β.

h) Proponga un rango para β en función del volumen objetivo que asegure la convergencia de e_n.

Situación 18: Tensión nominal del sistema eléctrico doméstico (en Argentina)

FIGURA 33. Operario eléctrico.

Bloques tematicos implicados en el problema

- Modelación Matemática
- Análisis de funciones
- Límites
- Integrales trigonométricas

Solemos decir que nuestro sistema eléctrico tiene una tensión de 220 V. Sin embargo la tensión $v(t)$ es en realidad una función del tiempo t según:

$$v(t) = 311{,}13\,\mathrm{sen}(2\pi 50t). \tag{28}$$

Una explicación física de esto es que una tensión variable $v(t)$ como la dada por la ecuación (28), al conectarse a una resistencia de valor R durante un tiempo T muy grande, produce la misma potencia media calórica que una tensión constante $v(t) = 220$ bajo las mismas condiciones.

Históricamente, tiene sentido utillizar el número 220, pues en los inicios se usaba corriente continua (constante) o alterna (variable) según el lugar. Además, muchos aparatos eléctricos de aquella época (que llevaban la inscripción AC/DC) funcionaban con ambas corrientes y entregaban la misma potencia útil (calórica, lumínica o motríz).

Ahora que conoce la explicación física e histórica del hecho de usar el número 220, compleméntelas con una explicación matemática.

Pistas para el planteo

1. La potencia es una función del tiempo que puede calcularse como:

$$p(t) = \frac{v(t)^2}{R}.$$

2. La potencia media generata en un tiempo T por una potencia $p(t)$ es:

$$p_M(T) = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt.$$

3. Si $p(t)$ se repite periódicamente en el tiempo con un periodo P, la potencia media puede calcularse de manera más sencilla como:

$$p_M(T) \approx \frac{1}{P}\int_0^P p(t)dt, \tag{29}$$

con un error que tiende a 0 si T tiende a ser mucho más grande que P.

Pistas para la solución

1. Verifique la igualdad entre la potencia media generada por una tensión constante $v(t) = 220$ con aquella generada por una tensión variable $v(t) = 311{,}13\,\mathrm{sen}(2\pi 50t)$, durante un tiempo T muy grande.
2. Grafique $v(t)^2$ para reconocer el periodo P con el que se repite $p(t)$. Finalmente, compruebe (29) cuando T es mucho más grande que P.

Situación 19: Producción de suministros sanitarios en pandemia

Bloques temáticos

- ◇ Técnicas de integración
- ◇ Análisis de funciones
- ◇ Cálculo de límites
- ◇ Cálculo e interpretación de derivadas
- ◇ Gráfica de funciones

Planteo del problema

Durante la pandemia Covid 19 quedó clara la importancia de contar con soluciones tecnológicas innovadoras, donde la medicina y la ingeniera vayan de la mano, ya sea para la impresión 3D de mascarillas protectoras faciales, el diseño y la producción de respiradores o el desarrollo de planes de transporte y abastecimiento. Planteamos aquí una situación hipotética (pero plausible) en el año 2020. La empresa para la que Ud. trabaja desarrolla elementos de protección y testeo y ha sido contratada por el gobierno para ser su proveedor principal. Ud. está a cargo de la logística, su objetivo es lograr la producción requerida antes del pico de contagios. Una forma simplificada de obtener la curva de infectados es usar la función logística que aparece en diversos modelos de crecimiento de poblaciones. Según esta función, la tasa de contagios está dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$P'(t) = rP(t)\left[1 - \frac{P(t)}{L}\right] \tag{30}$$

Donde $P(t)$ es el número de personas infectadas en el instante t, r es una constante propia del sistema (tome $r = 1$) y L el número total de personas en la provincia susceptibles de contagiarse. Cabe aclarar que el modelo no contempla la existencia de personas recuperadas ni inmunes. Se trata de una primera aproximación para representar la propagación de una enfermedad epidémica.

1. No siempre es necesario obtener una expresión analítica para describir las soluciones de una EDO. Interprete la derivada de la Ec. (1) como la pendiente de las rectas tangentes en cada punto de la gráfica de la función P(t), esboce así el comportamiento de la solución de la ecuación.
2. Integre la Ec. (1) para obtener analíticamente la cantidad total (acumulada) de contagios. Considere que la cantidad inicial de infectados (en $t = 0$) es 10 y está dada por los casos sospechosos que ingresaron a la provincia desde Europa o Asia a mediados de marzo del 2020. Ayudas para resolver la integral:
   a) Agrupe de un lado de la igualdad todo lo que depende de P.
   b) Utilice el método de sustitución para plantear de un lado de la igualdad una integral respecto de P y del otro, una integral respecto de t.
   c) La integral que depende de P se resuelve por el método de fracciones simples que consiste en escribir una función racional $R(x) = f(x)/g(x)$ (el grado del polinomio f debe ser mayor que el de g) como una suma de fracciones sencillas de integrar. Si $g(x)$ es un producto de factores lineal distintos, es decir, $g(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)...(a_kx + b_x)$, se sabe que existen constantes, $A_1, A_2, ..., A_k$, tales que:
   $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + ... + \frac{A_k}{a_kx + b_k} \tag{31}$$
   Para obtener el valor de las constantes multiplique ambos lados de la igualdad por $g(x)$, iguale los coeficientes de potencias de igual grado de x y resuelva el sistema de ecuaciones correspondiente. Finalmente, integre el lado derecho correspondiente a la Ec. (2). (Ejemplos resuletos con éste método pueden encontrarse en el libro Cálculo - una variable, Thomas, en la sección “integración de funciones racionales por medio de fracciones simples").
3. Demuestre que la cantidad total de contagios es una función creciente y acotada.
4. Determine cuándo se dará la máxima tasa de contagio y por lo tanto, antes de qué fecha debe tener listos los insumos requeridos por el gobierno.
5. Grafique $P'(t)$ y $P(t)$. Interprete en estos gráficos lo obtenido en los punto 1 y 3.

Situación 20: Cálculos en presas

Figura 34. Presa de Agua del Toro.

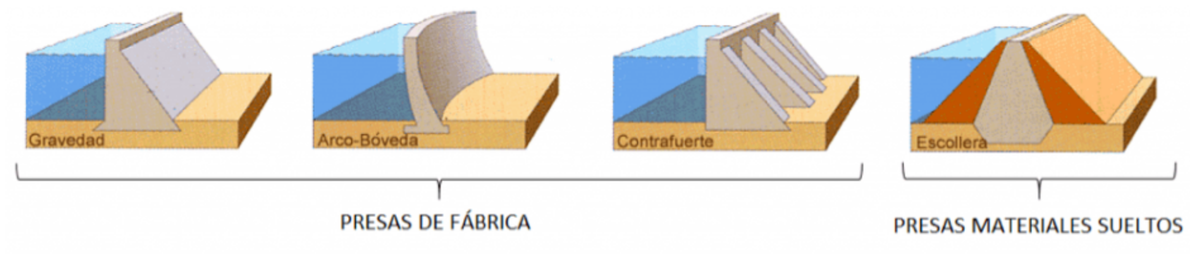
Bloques tematicos implicados en el problema

- ◇ Modelación Matemática
- ◇ Análisis de funciones
- ◇ Integral definida
- ◇ Aplicaciones del Cálculo Integral a Áreas y Volúmenes
- ◇ Fuerza de fluidos sobre placas

En ingeniería se denomina presa o represa a una barrera fabricada de piedra, hormigón o materiales sueltos, que se construye habitualmente en una cerrada o desfiladero sobre un río o arroyo. Tiene la finalidad de embalsar el agua en el cauce fluvial con el objetivo de:

- ◇ Mantener la disponibilidad para consumo humano y/o riego.
- ◇ Generar energía hidroeléctrica: elevando el nivel del agua con el fin de convertir la energía potencial en cinética y luego en mecánica, al mover turbinas eléctricas.
- ◇ Contener aluviones y/o prevenir inundaciones, embalsando caudales excedentes y erogándolos en forma controlada.

Tipos de presas



Tipos de presa
- Presas de fábrica
  - de gravedad de hormigón
  - de arco
  - de contrafuerte
- Presas de materiales sueltos
  - homogéneas
  - de núcleo impermeable
  - de pantalla impermeable

Uno de los diseños empleados en la construcción de presas es la presa de arco. Suele utilizarse en cañones estrechos y se curva hacia el agua que contiene. La fuerza del agua presiona las paredes de la presa contra el cañón, de manera que la roca hace de soporte adicional para la estructura. Eso permite, ahorrar materiales en la construcción de la presa, por comparación con las de soporte vertical. Como dificultad, requieren gran capacidad resistente de los costados donde se apoya y que la sección transversal de esa sección del río debe cumplir con ciertas características geométricas, o de forma, cuanto más simétrica mejor.

En Mendoza contamos con un ejemplar de presa de arco y es la presa de Agua del Toro ubicada sobre el río Diamante (Fig. 34).

Una sección de una presa de arco típica sigue el modelo de la Figura a . Al girar esa sección en torno al eje y se forma la presa de arco. El número de grados que se gira y el ancho de la base varían de una a otra, dependiendo sobre todo de las variaciones que pueda sufrir el nivel del agua. Una posible configuración, con giro de 150º y radio de 150 pies medido a la base de la presa, se muestra en la Figura b:

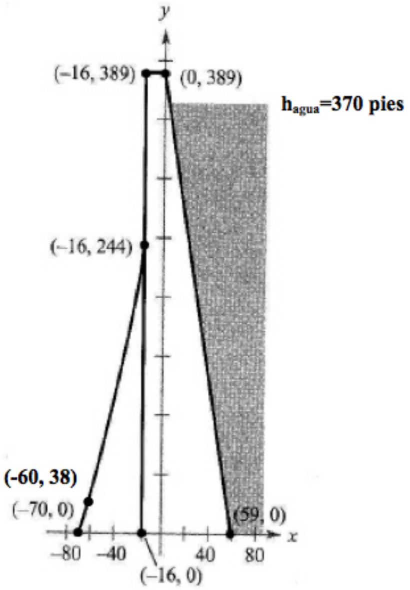


Figura a. Sección transversal tipo.

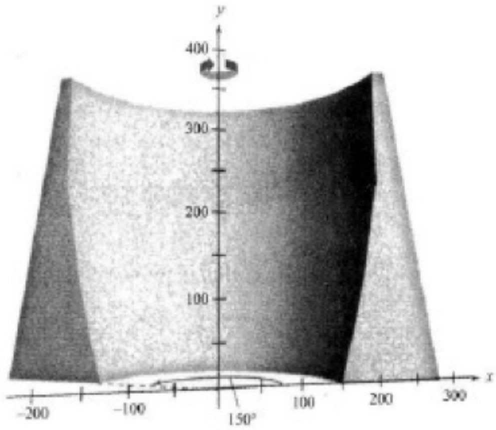


Figura b.

Para esta presa de arco:

1. Escriba la función por partes a la que responde el esquema de la figura a, sabiendo que en el intervalo de abscisas de -70 pies a -16 pies corresponde a un polinomio de segundo grado y de -16 pies a 60 pies todos los tramos están formado por polinomios de primer grado.
2. Calcule la cantidad de hormigón necesario para construir la presa.
3. Calcule el área de la superficie de la presa que está del lado del agua.
4. Estime la fuerza debida a la presión que ejerce el agua sobre una franja de 1m de ancho de la presa. En esa longitud se puede considerar la franja plana y no curva. Considere que el agua tiene un nivel de 370 pies. (rallado en la Figura c).

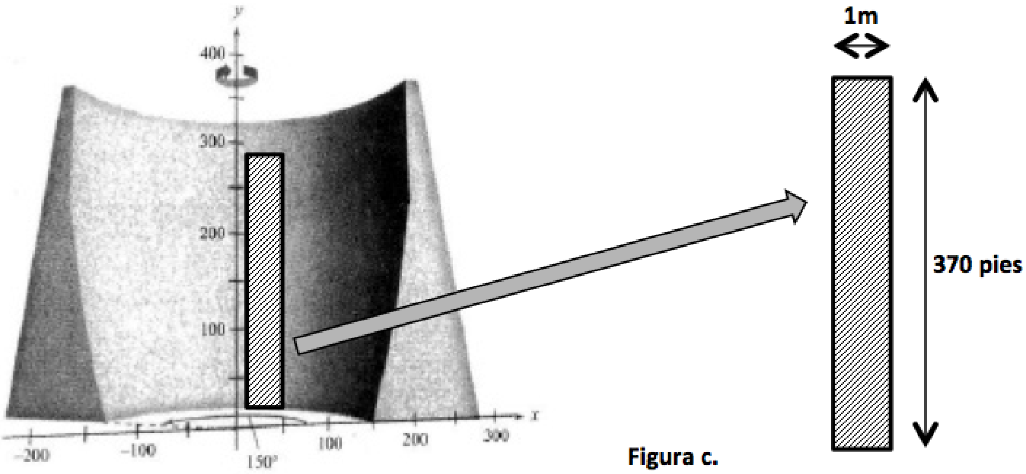


Figura c.

Referencias

-https://issuu.com/jr.econde/docs/proyectos_de_calculo_integral

-https://masqueingenieria.com/blog/tipos-de-presas-y-su-clasificacion/

-https://www.argentina.gob.ar/orsep/registro-de-presas-fiscalizadas/regional-cuyo-centro/agua-del-toro

Situación 20: Aproximando cambios de funciones potenciales con multiplicaciones simples

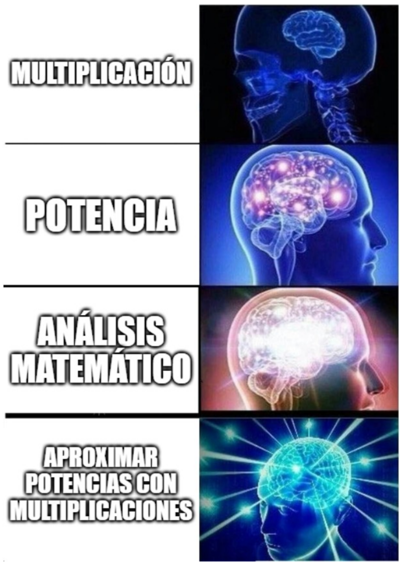


FIGURA 36.

Bloques tematicos implicados en el problema

- ◇ Modelación Matemática
- ◇ Análisis de funciones
- ◇ Derivación y Linealización

A lo largo de su carrera y vida profesional, descubrirá que las funciones potenciales y los cambios relativos aparecen muy frecuentemente. Mediante esta actividad, usted aprenderá a aproximar el cambio relativo de funciones potenciales usando una simple multiplicación. La aproximación aprendida le será útil para resolver problemas *aparentemente* complejos, mediante cálculos mentales muy simples.

A. Obtener la linealización $L = L(x)$ alrededor de $x = 0$ de

$$f(x) = (1 + x)^k, \quad \text{donde } k \in \mathbb{R}, k \neq 0,$$

y justificar para qué valores de k se tiene $f(x) > L(x)$ para $x > 0$ y para cuáles $f(x) < L(x)$ para $x > 0$.

Observación: la unidad 1 en el desarrollo anterior es útil para representar el estado de referencia de una propiedad numérica de algún objeto. Por ejemplo, si se está estudiando cuándo dinero se obtendrá por invetir un cierto dinero hoy, el problema se puede plantear preguntando cuántos pesos se obtendrán por cada peso invertido hoy. Es decir, todo el análisis se puede hacer suponiendo que el valor de referencia de la variable es 1 y luego los resultados serán proporcionales a ese valor particular.

B. Teniendo en cuenta la observación anterior, interprete a la variable x en la expresión

$$f(x) = (1+x)^k, \quad \text{donde } k \in \mathbb{R}, k \neq 0.$$

Ejemplifique su interpretación.

C. Sea $y = g(x)$ y su incremento (absoluto) cuando la variable x pasa de a a $a + \Delta x$ dado por

$$\Delta y = g(a + \Delta x) - g(a).$$

El incremento relativo de $y = g(x)$ es

$$\Delta_r y = \frac{g(a+\Delta x) - g(a)}{g(a)} = \frac{g(a+\Delta x)}{g(a)} - 1.$$

Suponga que $y = g(x) = cx^k$ donde $c \neq 0$ y k es un número real no nulo. Pruebe, utilizando la linealización del primer inciso, que

$$\Delta_r y \approx k\Delta_r x, \tag{30}$$

donde $\Delta_r x$ es el incremento relativo de x con respecto al valor inicial $x = a$:

$$\Delta_r x = \frac{a + \Delta x - a}{a} = \frac{\Delta x}{a}.$$

Finalmente, definiendo los cambios relativos porcentuales como:

$$\Delta_{r\,\%} x = 100\Delta_r x$$

y

$$\Delta_{r\,\%} y = 100\Delta_r y,$$

demuestre que:

$$\Delta_{r\,\%} y \approx k\Delta_{r\,\%} x. \tag{31}$$

A continuación, elija una aplicación.

Aplicación 1: tiempo de descarga de un archivo

El tiempo que un archivo tarda en descargarse depende de muchos factores, los dos principales son: la velocidad de la red y la proporción que ocupa la carga útil con respecto a la totalidad de datos que deben transmitirse para que el archivo llegue íntegro. Esto último se debe a que en la práctica se transmite el archivo y otros datos que sirven para la sincronización y la detección y corrección de errores. En el caso complejo de internet, la proporción *datos transmitidos/carga útil* no es simple de conocer pero puede suponerse constante para este ejemplo.

Suponga que un archivo de 1 GB tarda una hora en descargarse con una velocidad de 3 Mb/s. ¿Cuánto tardará en descargarse con una velocidad de descarga de 3.3 Mb/s?

Primero encuentre la solución exacta y luego utilice las expresiones (30) y (31) para aproximar su solución. Tenga en cuenta lo siguiente:

$$T = \frac{D}{V} = K\frac{C}{V},$$

donde

- ◇ 1 B (1 byte) = 8 bit (8 b)
- ◇ T = tiempo de descarga
- ◇ V velocidad de descarga
- ◇ C = carga útil
- ◇ D = datos transmitidos
- ◇ D - C = datos que sirven para la sincronización y la detección y corrección de errores
- ◇ K = constante de proporcionalidad

Aplicación 2: compra de un televisor nuevo

Suponga que se quiere decidir sobre la compra de un televisor nuevo y hay dos opciones: uno de 50 pulgadas a 100000 pesos y otro de 55 pulgadas a 120000 pesos. Ambos tienen una relación de aspecto K, es decir, si las bases son b_1 y b_2, las alturas h_1 y h_2 y las diagonales L_1 y L_2, se tiene que

$$K = \frac{b_1}{b_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{L_1}{L_2}. \tag{32}$$

Suponga que ambos tienen un precio justo, entendiendo por esto que el precio es proporcional al producto del área de la pantalla por la calidad. Ya que ambos tienen un precio justo, se desea comprar el de mayor calidad. ¿Cuál es? Para responder al interrogante, siga los siguientes pasos.

1. Plantee fórmulas para el precio de cada televisor en términos de las áreas A_1 y A_2 de los mismos (suponga que la constante de proporcionalidad es la misma para ambos).
2. Teniendo en cuenta la relación de aspecto (32), deduzca que las áreas de los televisores A_1 y A_2 cumplen
$$A_1 = Cb_1^2, \quad A_2 = Cb_2^2,$$

donde C es la misma constante de proporcionalidad para ambos televisores. Luego, obtenga

$$A_1 = DL_1^2 \quad \text{y} \quad A_2 = DL_2^2,$$

con D la misma constante para ambos televisores.

3. Plantee un sistema que permita responder al interrogante en forma exacta. ¿Puede resolver el sistema?
4. Teniendo en cuenta las expresiones encontradas anteriormente y la relación entre las diagonales de los televisores, utilice (30) o (31) para responder cuál de los televisores presenta mayor calidad.

Aplicación 3: Conversación en una obra en construcción

Suponga que está en una obra en construcción y tiene dos opciones para la armadura de uno de sus tabiques: 100 barras del 10 o 120 barras del 8 (medida nominal en mm). Debe tomar una decisión rápida sin consultar precios. ¿Cuál es la opción más barata? Para responder haga las siguientes suposiciones: las dos opciones son igual de seguras, todas las barras son del mismo largo y el precio es proporcional al volumen de cada barra (en mm^3) con la misma constante de proporcionalidad.

1. Plantee fórmulas para el costo de cada tipo de barra en términos de las áreas A_1 y A_2 de la sección transversal de cada una de ellas (suponga que ambas tienen la misma longitud L y que la constante de proporcionalidad es la misma).
2. Teniendo en cuenta las expresiones encontradas anteriormente y la relación entre las diámetros de las barras, utilice (30) o (31) para responder qué opción es más barata.

Aplicación 4: Marcación de precios en tiempos de incertidumbre

Imagina que es el dueño de una ferretería y tiene a la venta tanques de agua (con tapa) de 1000 L y de 1100 L. El de 1000 L se vende más seguido y por lo tanto usted ha actualizado su precio en los últimos meses, pero olvidó actualizar el precio del de 1100 L. Un día vienen a comprarle el de 1100 L y cuando ve la lista de precios, nota que el de 1000 L está a 20000 pesos y el de 1100 L a 15000 pesos, fruto de su olvido de actualización por inflación. Usted no quiere perder al cliente , tampoco quiere venderlo a un precio inferior a lo que le costaría volver a comprarlo. Tampoco tiene tiempo de consultar el precio con el proveedor. ¿Cuál sería un precio justo para el tanque de 1100 L? Para responder suponga que el precio de los tanques es proporcional (con la misma constante) a la cantidad de plástico, que ambos tienen el mismo espesor y que tiene la misma relación de aspecto:

$$\frac{h_1}{r_1} = \frac{h_2}{r_2} = k, \tag{33}$$

donde r_1, r_2 denota los radios de los tanques y h_1, h_2 las alturas.

1. Escriba expresiones para el precio de ambos tanques en función de las variables de interés (denote por e el espesor, K la constante de proporcionalidad y A_1, A_2 el área lateral de cada tanque).
2. Plantee un sistema de ecuaciones para obtener la solución exacta.
3. Para obtener una solución aproximada, vamos a comprobar la siguiente afirmación intuitiva: *dado que, por* (33)*, el volumen del tanque es proporcional al cubo de una longitud característica como puede ser el radio, el área superficial total del tanque (laterales más las áreas de la tapa y la base) será proporcional al cuadrado de dicha longitud. Luego, el precio del tanque será proporcional al volumen del mismo elevado a la 2/3.*

   Para comprobar la afirmación, realice los siguientes pasos:

   a) Utilizando (33), escriba fórmulas para las áreas superficiales y los volúmenes de los tanques en función del radio de los mismos.

   b) A partir de las expresiones encontradas en el inciso anterior, compruebe que las áreas superficiales de los tanques son proporcionales a los volúmenes elevados a la $2/3$.

   c) Finalmente, escriba los precios de los tanques en función de los volúmenes de los mismos.
4. Utilizando la información anterior y a partir de la relaciones (30) o (31), determine el precio aproximado del tanque de 1100 L.