Análisis Matemático I
Clase 24: Series de Taylor

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Junio, 2024

Objetivo: dada una función f y un punto a en el interior del dominio de f, se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de f cerca de a.

Series de Taylor

Objetivo: dada una función f y un punto a en el interior del dominio de f, se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de f cerca de a.
Un ejemplo de la construcción que se desea es la **linealización** de f en a. Recordar que:

$$f(x) \approx L(x) = f'(a)(x - a) + f(a),$$

y la aproximación mejora cuando x tiende a a. Observar que la linealización es un polinomio de grado 1 y que su utilidad radica en que es una expresión sencilla para realizar cálculos (evaluaciones en x particulares, derivación, integración, etc.).

Objetivo: dada una función f y un punto a en el interior del dominio de f, se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de f cerca de a.
Un ejemplo de la construcción que se desea es la **linealización** de f en a. Recordar que:

$$f(x) \approx L(x) = f'(a)(x-a) + f(a),$$

y la aproximación mejora cuando x tiende a a. Observar que la linealización es un polinomio de grado 1 y que su utilidad radica en que es una expresión sencilla para realizar cálculos (evaluaciones en x particulares, derivación, integración, etc.).
¿Se podrán obtener mejores aproximaciones de f aumentando el grado del polinomio de aproximación?

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón x y primer término 1.

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón x y primer término 1. Así:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots\,, \quad \text{cuando } |x| < 1.$$

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón x y primer término 1. Así:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots, \quad \text{cuando } |x| < 1.$$

La serie anterior **está centrada en** $a = 0$ pues contiene potencias de $x - 0$ y converge en el intervalo $(-1, 1)$ (centrado en 0). Decimos que $(-1, 1)$ es el intervalo de convergencia y $R = 1$ es el radio de convergencia.

Además, las sumas parciales de la serie son polinomios:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + x^2$$

$$\vdots$$

Series de Taylor

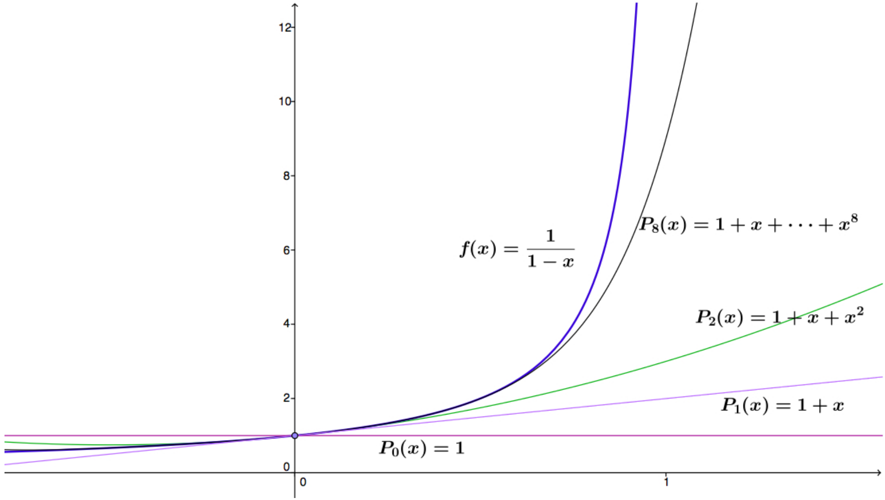
En general, la suma parcial n-ésima será:

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ converge a $f(x)$, entonces tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x), \qquad |x| < 1.$$

Así, a medida que n es mayor, el polinomio P_n aproxima mejor a f cerca de $a = 0$.


12
10
8
6
4
2
0
0
1
$P_8(x) = 1 + x + \cdots + x^8$
$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$
$P_2(x) = 1 + x + x^2$
$P_1(x) = 1 + x$
$P_0(x) = 1$

Series de Taylor

A lo largo de la clase (y la siguiente) vamos a estudiar:

- Dada una función f y un punto a en el interior de su dominio, generar una serie en potencias de $x - a$, con sumas parciales dadas por polinomios. Dicha serie se llamará **serie de Taylor** centrada en a generada por f.

A lo largo de la clase (y la siguiente) vamos a estudiar:

- Dada una función f y un punto a en el interior de su dominio, generar una serie en potencias de $x - a$, con sumas parciales dadas por polinomios. Dicha serie se llamará **serie de Taylor** centrada en a generada por f.
- Estudiar condiciones que garanticen que la serie de Taylor centrada en a hallada en el ítem anterior converge, en cierto intervalo, a la función original. De esta forma, las sumas parciales de la serie de Taylor serán buenas aproximaciones de f cerca del punto a.

Series de Taylor

En esta parte, vamos a ver cómo generar una serie de Taylor. Para ello, supongamos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots, \quad |x-a| < R$$

Series de Taylor

En esta parte, vamos a ver cómo generar una serie de Taylor. Para ello, supongamos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots, \quad |x-a| < R$$

Entonces necesariamente:

$$a_0 = f(a) = f^{(0)}(a) \qquad (\text{convención } f^{(0)} = f).$$

Si derivamos f:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots$$

y entonces:

$$a_1 = f'(a).$$

Si volvemos a derivar:

$$f^{(2)}(x) = 2a_2 + 3.2.a_3(x-a) + \cdots$$

y así

$$f^{(2)}(a) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f^{(2)}(a)}{2}.$$

La derivada de orden 3 de f es:

$$f^{(3)}(a) = 3.2a_3 + \text{términos que dependen de } (x-a),$$

y:

$$f^{(3)}(a) = 3.2.a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{3!}$$

y en general los coeficientes de la serie f en potencias de $(x-a)$ son:

$$f^{(n)}(a) = n!.a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad n = 0, 1, \ldots$$

Series de Taylor

Serie de Taylor generada por una función

Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en un intervalo I que contiene a un punto a. Entonces, la serie de Taylor generada por f y centrada en el punto a es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \qquad x \in I.$$

Escribimos:

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad x \in I.$$

Las sumas parciales de la serie de Taylor de una función f, centrada en a, se llaman polinomios de Taylor:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Series de Taylor

Ejemplo: mostrar que la serie de Taylor centrada en $a = 0$ generada por $f(x) = e^x$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Es decir se pide comprobar:

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: mostrar que la serie de Taylor centrada en $a = 0$ generada por $f(x) = e^x$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Es decir se pide comprobar:

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Solución: vamos a calcular los coeficientes de la serie de Taylor generada por la función exponencial en $a = 0$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Series de Taylor

Para $n = 0$, $f^{(0)}(x) = f(x) = e^x$ y entonces:

$$\frac{f^{(0)}(0)}{0!} = \frac{e^0}{1} = 1.$$

Además, $f'(x) = e^x$, $f^{(2)}(x) = e^x$ y entonces

$$f^{(n)}(x) = e^x \text{ para todo } n.$$

Así

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Por lo tanto

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Series de Taylor

Para $n = 0$, $f^{(0)}(x) = f(x) = e^x$ y entonces:

$$\frac{f^{(0)}(0)}{0!} = \frac{e^0}{1} = 1.$$

Además, $f'(x) = e^x$, $f^{(2)}(x) = e^x$ y entonces

$$f^{(n)}(x) = e^x \text{ para todo } n.$$

Así

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Por lo tanto

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

En cuando a la convergencia de la serie a la función, hay que hacer un análisis diferente.

Pregunta: ¿podemos asegurar que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}? \textbf{ Es decir ¿} \lim_{n\to\infty} P_n(x) = e^x?$$

La respuesta a esta pregunta la veremos un poco más adelante. Sin embargo, observar que si tomamos los primeros polinomios de Taylor:

$$P_0(x) = 1$$

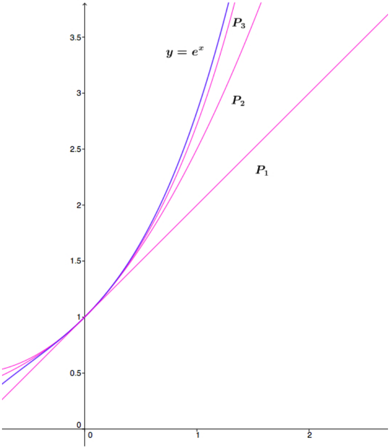
$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

y los graficamos:

Aproximación de $y = e^x$ mediante los polinomios de Taylor



se obtiene que a medida que n aumenta, los polinomios P_n son cada vez más parecidos a e^x, es decir, conjeturamos que $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = e^x$ para todo x.

Como otra evidencia, comparamos los valores de la función exponencial con el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0:

x	-1.0	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	1.0
e^x	0.3679	0.81873	0.904837	1	1.105171	1.22140	2.7183
$P_3(x)$	0.3333	0.81867	0.904833	1	1.105167	1.22133	2.6667

Analizaremos ahora el problema de la convergencia de series de Taylor a la función que la genera.

Convergencia de series de Taylor

Teorema

Si f tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo I que contiene a un punto a en su interior, entonces para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe c_n entre a y x tal que:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Nota: el término:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

se denomina residuo o resto de orden n.

Convergencia de series de Taylor

Por ende, la conclusión del teorema anterior puede escribirse: para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe c_n entre a y x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde P_n es el polinomio de Taylor centrado en a de f y R_n es el residuo de orden n.

Convergencia de series de Taylor

Por ende, la conclusión del teorema anterior puede escribirse: para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe c_n entre a y x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde P_n es el polinomio de Taylor centrado en a de f y R_n es el residuo de orden n.

Recordemos que para obtener:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

las sumas parciales de la serie de Taylor deben converger a $f(x)$. Es decir, se debe tener:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x).$$

En vista del teorema anterior, esto sucede si y solo si:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Convergencia de series de Taylor

Definición

Si $R_n(x)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ para cada x de un intervalo I que contiene a a, entonces decimos que la serie de Taylor centrada en a generada por f converge a f en I y escribimos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Definición

Si $R_n(x)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ para cada x de un intervalo I que contiene a a, entonces decimos que la serie de Taylor centrada en a generada por f converge a f en I y escribimos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Importante: si existe una constante $M > 0$ tal que

$$|f^{n+1}(t)| \leq M, \quad \text{para todo n y todo t entre a y x},$$

entonces

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \quad n \to \infty,$$

ya que el factorial crece mucho más rápido que las potencias. Así,

$$R_n(x) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Ejemplo 1: demuestre que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1: demuestre que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.
Solución. anteriormente se obtuvo que:

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Convergencia de series de Taylor

Para demostrar que la exponencial es igual a la serie de Taylor generada, vamos a comprobar que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{para todo x real.}$$

En este caso, por el Teorema de convergencia de series de Taylor, para cada x y cada n, existe c_n entre $a = 0$ y x tal que:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Para probar que el residuo tiende a cero, vamos a distinguir tres casos:

Convergencia de series de Taylor

Para demostrar que la exponencial es igual a la serie de Taylor generada, vamos a comprobar que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{para todo x real.}$$

En este caso, por el Teorema de convergencia de series de Taylor, para cada x y cada n, existe c_n entre $a = 0$ y x tal que:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Para probar que el residuo tiende a cero, vamos a distinguir tres casos:
-Si $x = 0$, entonces

$$e^x = e^0 = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 \quad \text{cuando } x = 0.$$

Convergencia de series de Taylor

Para demostrar que la exponencial es igual a la serie de Taylor generada, vamos a comprobar que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{para todo x real.}$$

En este caso, por el Teorema de convergencia de series de Taylor, para cada x y cada n, existe c_n entre $a = 0$ y x tal que:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Para probar que el residuo tiende a cero, vamos a distinguir tres casos:
-Si $x = 0$, entonces

$$e^x = e^0 = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 \quad \text{cuando } x = 0.$$

-Supongamos que $x > 0$. Entonces para todo $t \in (0, x)$ tenemos

$$|f^{(n+1)}(t)| = e^t < e^x.$$

Convergencia de series de Taylor

Tomando $M = e^x$, se obtiene por la observación de la diapositiva previa que

$$R_n(x) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

-Finalmente, supongamos que $x < 0$. Entonces para todo $t \in (x, 0)$, y como la función exponencial es creciente, se tiene:

$$|f^{(n+1)}(t)| = e^t < e^0 = 1.$$

Así:

$$R_n(x) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

En conclusión, para todo $x \in \mathbb{R}$ obtenemos:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Más ejemplos se verán en la próxima clase.