Series p
Prof. Verónica Nodaro

June 14, 2024

TP 7- Ejercicio 14

El criterio de la razón no ayuda con las series p, con $p > 0$. Intente aplicarlo a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 0$$

y pruebe que el criterio no brinda información sobre la convergencia o divergencia de la serie. Finalemente, utilice un criterio apropiado para decidir para qué valores de p la serie converge y para cuáles diverge.

Solución

Aplicamos el criterio de la razón tomando $a_n = \dfrac{1}{n^p}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}\right| = \left|\frac{n^p}{(n+1)^p}\right| = \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\right|$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$$

Por lo que el criterio de la razón no es concluyente. Utilicemos el criterio de la integral para analizar la convergencia de la serie p.

Consideramos la función $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

La función es positiva y continua para $x \geqslant 1$. Para ver que es decreciente, analicemos el signo de su derivada.

$$f'(x) = -px^{-p-1} = \frac{-p}{x^{p+1}}$$

Como $p > 0$ y $x \geqslant 1$, la derivada es negativa y por lo tanto, la función es decreciente.

Calculemos ahora la integral de la función,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p} dx$$

Que toma distintos valores según el valor de p.

1. Si $p = 1$,

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \ln(x)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} [\ln(b) - \ln(1)] = \infty$$

   Por el criterio de la integral, la serie diverge.

2. Si $p < 1$, $-p + 1 > 0$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^b = \frac{1}{-p+1}[b^{-p+1} - 1] = \infty$$

   Como la integral diverge, la serie diverge.

3. Si $p > 1$, $-p + 1 < 0$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(-p+1)(x^{p-1})}\Big|_1^b = \frac{1}{-p+1}\left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right] = \frac{-1}{-p+1}$$

   Como la integral converge, la serie converge.

Por lo tanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

converge para $p > 1$ y diverge para los otros valores de p.