Trabajo Práctico 1

Funciones vectoriales

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro "Cálculo de varias variables"de Thomas, décimosegunda edición, Ed. Pearson.
Los ejercicios se dividen en ejercicios obligatorios (o), recomendados no obligatorios (r) y opcionales (*).

Expresiones de cálculo (las definiciones se han dado en clase de teoría).

$$s = \int_a^b \|\mathbf{v}(t)\| dt \qquad \text{Longitud de arco}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\mathbf{r}'(\mathbf{t}) \qquad \text{Vector tangente unitario}$$

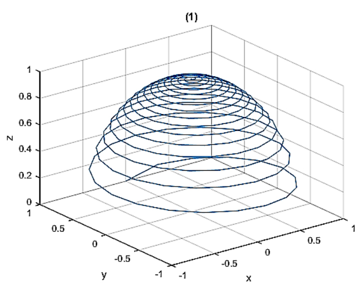
Funciones vectoriales: introducción

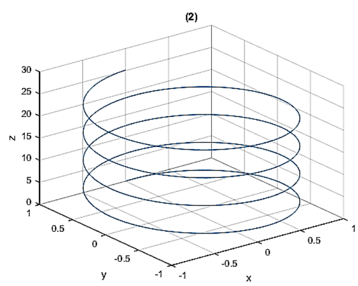
1. (o)

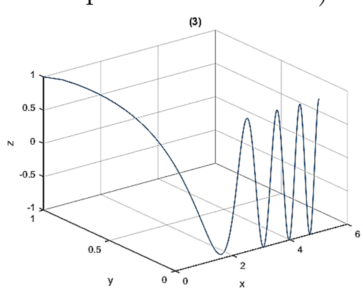
   a) Represente gráficamente la curva que es la imagen de cada una de las siguientes funciones vectoriales, indicando punto inicial y final en cada caso. (En caso de ser posible escriba la o las ecuaciones cartesianas que representen las coordenadas de los puntos en la curva.)

   1) $\mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 1)$, $-2 \leq t \leq 2$.
   2) $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $-2 \leq t \leq 2$.
   3) $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $-2 \leq t \leq 2$.
   4) $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$, $-2 \leq t \leq 2$.
   5) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
   6) $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$, $-\pi \leq t \leq \pi$.
   7) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
   8) $\mathbf{r}(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
   9) $\mathbf{r}(t) = (1, t^2, t)$, $0 \leq t \leq 2$.
   10) $\mathbf{r}(t) = (\cos(3t)\cos(t), \cos(3t)\operatorname{sen}(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$. En esta curva analice si se corta a sí misma e indique cuál es una condición para que una función vectorial represente una curva que no se corte a sí misma (es decir, que sea simple).

   b) Indique qué gráfico se corresponde con qué curva: (En caso de ser posible escriba la o las ecuaciones cartesianas que representen las coordenadas de los puntos en la curva)







$\mathbf{r}_1(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $t \in [0, 8\pi]$;
$\mathbf{r}_2(t) = (\sqrt{t}, e^{-t}, \cos t)$, $t \in [0, 8\pi]$;
$\mathbf{r}_3(t) = ((1-t)\operatorname{sen}(100\,t), (1-t)\cos(100\,t), \sqrt{1-(1-t)^2})$, $t \in [0, 1]$.

2. (o) Dé una parametriación para cada una de las siguientes curvas.

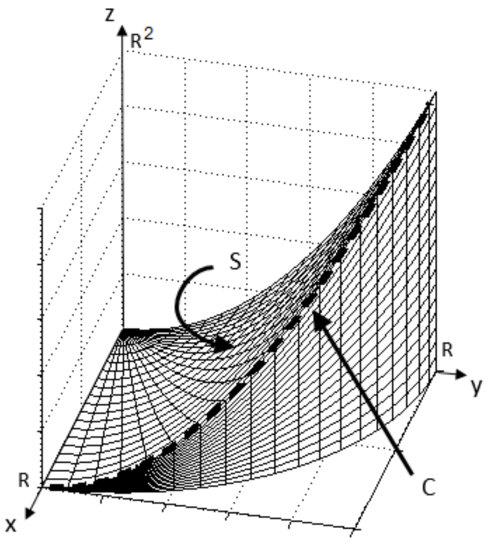
   a) El segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 2)$, en ese orden, en el plano. Repita, invirtiendo el sentido de recorrido.

   b) El segmento que une los puntos $(0, 3, 1)$ y $(1, 3, 0)$, en ese orden, en el espacio. Repita, invirtiendo el sentido de recorrido.

   c) La curva que se encuentra en el espacio, y se puede describir como el lugar geométrico de intersección del cilindro parabólico de ecuación $z = 1 - x^2$ y el plano $y = 5$, entre los puntos $(0, 5, 1)$ y $(1, 5, 0)$, recorridos en ese orden. Repita, invirtiendo el sentido de recorrido.

   d) Dado $R > 0$, parametrice el arco de circunferencia con centro en $(0, R, 0)$ y radio R, incluido en el plano $y = R$, desde el punto $(R, R, 0)$ hasta el punto $(0, R, R)$, en sentido horario visto desde el punto $(0, 2R, 0)$. Repita, invirtiendo el sentido de recorrido.

   e) Dado $R > 0$, parametrice la curva C, intersección de las superficies $x^2 + y^2 = R^2$ y $z = y^2$, como muestra la figura siguiente (curva punteada, en el gráfico), en sentido antihorario cuando se mira desde el semieje z positivo.



3. (o) Para cada una de las funciones del ejercicio 1*a*,

   a) analice la continuidad;

   b) calcule la derivada en cada punto e indique si se trata o no de una curva suave;

   c) halle la rapidez, velocidad, aceleración, vector tangente unitario y ecuación de la recta tangente en el punto intermedio de cada intervalo.

4. (*) Sean $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ funciones con valores vectoriales dadas por $\mathbf{r}(t) = r_1(t)\mathbf{i} + r_2(t)\mathbf{j} + r_3(t)\mathbf{k}$ y $\mathbf{s}(t) = s_1(t)\mathbf{i} + s_2(t)\mathbf{j} + s_3(t)\mathbf{k}$. Sabiendo que $\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L} = (l_1, l_2, l_3)$ si y sólo si $\lim_{t\to a} r_1(t) = l_1$, $\lim_{t\to a} r_2(t) = l_2$ y $\lim_{t\to a} r_3(t) = l_3$, pruebe las siguientes propiedades:

   a) $\mathbf{r}$ es continua en $t_0 \in \mathbb{R}$ si y sólo si r_1, r_2 y r_3 son continuas en t_0.

   b) Si $\mathbf{r}$ es diferenciable en t_0, entonces es continua en t_0.

   Si, además, las funciones componentes de $\mathbf{r}$ y de $\mathbf{s}$ son derivables en $t_0 \in \mathbb{R}$, pruebe que:

c) $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)+\mathbf{s}(t)] = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) + \frac{d\mathbf{s}}{dt}(t)$.

d) $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{s}(t)] = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\cdot\mathbf{s}(t) + \mathbf{r}(t)\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}(t)$.

e) $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\times\mathbf{s}(t)] = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\times\mathbf{s}(t) + \mathbf{r}(t)\times\frac{d\mathbf{s}}{dt}(t)$.

f) Si f es una función real de una variable real, derivable, $\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{r}(t)] = f'(t)\mathbf{r}(t) + f(t)\mathbf{r}'(t)$.

g) Si f es una función real de una variable real, derivable, $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(f(t))] = f'(t)\mathbf{r}'(f(t))$.

5. (r) Sea $\mathbf{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ una función con derivadas de todos los órdenes. Si u es una función definida en $\mathbb{R}$ por $u(t)=\mathbf{r}(t)\cdot[\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)]$, pruebe que $u'(t)=\mathbf{r}(t)\cdot[\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}'''(t)]$.

6. (o) Pruebe que si $\mathbf{r}$ es una función vectorial diferenciable de módulo constante, entonces la derivada $\mathbf{r}'$ es ortogonal a $\mathbf{r}$ en cada punto.

7. (o) En cada uno de los siguientes ejercicios $\mathbf{r}(t)$ es la posición de una partícula en el plano xy en el instante t, $t\geq 0$. Halle una ecuación en x e y cuyo gráfico sea la trayectoria de la partícula. Halle los vectores velocidad y aceleración de la partícula en el valor indicado de t.

   a) $\mathbf{r}(t)=(t+1)\mathbf{i}+(t^2-1)\mathbf{j}$, $t=1$.

   b) $\mathbf{r}(t)=(e^t,\frac{2}{9}e^{2t})$, $t=\ln 3$.

8. (r) La posición de una partícula que se mueve sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$ en el plano xy viene dada por $\mathbf{r}(t)=(\operatorname{sen}(t),\cos(t))$, $t\in\mathbb{R}$. Halle la velocidad y aceleración de la partícula en los instantes $t_1=\pi/4$ y $t_2=\pi/2$; represéntelos como vectores sobre la curva.

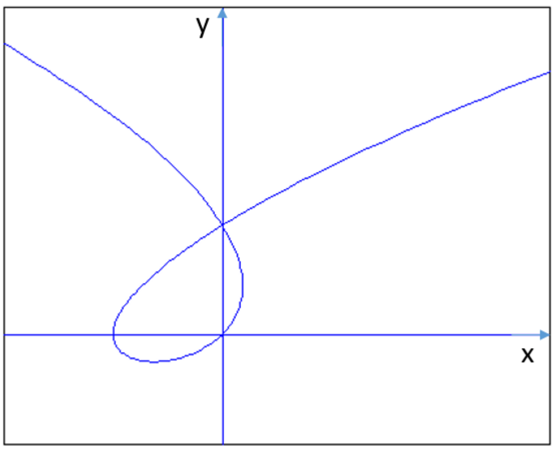
9. a) (o) La posición de una partícula que se mueve en el espacio viene dada por

$$\mathbf{r}(t)=(t+1,t^2-1,2t),\ t\in\mathbb{R}.$$

   Halle la velocidad y aceleración de la partícula. También halle la rapidez y dirección del movimiento de la partícula en el instante $t=1$. Escriba la velocidad de la partícula como el producto de la rapidez y la dirección de movimiento.

   b) (r) Repita el ejercicio anterior para $\mathbf{r}(t)=(2\cos t,3\operatorname{sen} t,4t)$ y $t=\pi/2$.

10. (r) Sea la curva dada por $\mathbf{r}(t)=(t^3-t^2-t,t^2-t)$, $t\in\mathbb{R}$, cuyo gráfico se incluye a continuación.



   a) Indique con una flecha sobre el gráfico, cuál es el sentido de recorrido de la curva.

   b) Halle analíticamente las coordenadas de los puntos de corte de esta curva con los ejes coordenados.

   c) Indique dónde esta curva se corta a sí misma (debe dar los valores del parámetro y las coordenadas del punto de corte).

   d) Si $\mathbf{r}$ representa la posición de un móvil en función del parámetro t, exprese cuál es $\mathbf{r}'(t)$. Trace en su gráfico $\mathbf{r}'(1)$.

   e) Si $\mathbf{r}$ representa la posición de un móvil en función del parámetro t, exprese cuál es $\mathbf{r}''(t)$. Trace en su gráfico $\mathbf{r}''(1)$. Trácelo en el gráfico.

f) Halle el vector tangente unitario a la curva dada por $\mathbf{r}$ en el punto $\mathbf{r}(0)$.

g) Indique, justificando su respuesta, si se trata o no de una curva suave.

11. (o) Dé ecuaciones paramétricas para la recta que es tangente a la curva dada en el valor dado del parámetro:

    a) $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen} t, t^2 - \cos t, e^t)$, $t_0 = 0$.

    b) $\mathbf{r}(t) = (\ln t, \frac{t-1}{t+2}, t \ln t)$, $t_0 = 1$.

12. (o) Considere las siguientes funciones:

    a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$;

    b) $\mathbf{r}(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$, $t \geq 0$;

    c) $\mathbf{r}(t) = (\cos(t - \frac{\pi}{2}), \operatorname{sen}(t - \frac{\pi}{2}))$, $t \geq 0$;

    d) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$;

    e) $\mathbf{r}(t) = (\cos(t^2), \operatorname{sen}(t^2)$, $t \geq 0$;

    Cada una de las ecuaciones anteriores describe el movimiento de una partícula sobre la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Para cada caso responda las siguientes preguntas:

    i) ¿Es constante la rapidez de la partícula?

    ii) ¿Es la aceleración de la partícula ortogonal a su velocidad en todos los puntos?

    iii) ¿El movimiento de la partícula es en sentido horario o contrario al movimiento de las agujas del reloj?

    iv) ¿La partícula está inicialmente en el punto $(1, 0)$?

13. (o) Una partícula se mueve a lo largo de la rama superior de la parábola $y^2 = 2x$, de izquierda a derecha, con una rapidez constante de 5 unidades por segundo. Halle la velocidad de la partícula al pasar por el punto $(2, 2)$.

14. (r) Sea $\mathbf{r}$ una función vectorial diferenciable de t. Pruebe que si $\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ para todo t, entonces $|\mathbf{r}|$ es constante.

Integrales de funciones vectoriales

15. (o) Calcule:

    a) $\int (\cos t, 1, -2t) dt$

    b) $\int_0^{\pi} (\cos t, 1, -2t) dt$

16. (o) Suponga que se desconoce la trayectoria de un planeador pero se conoce su aceleración: $\mathbf{a}(t) = -3\cos t\mathbf{i} - 3\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Se sabe que inicialmente (en $t = 0$) el planeador partió del punto $(3, 0, 0)$ con velocidad $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Determine la posición del planeador como función de t.

17. (*) Un proyectil es disparado desde el origen de coordenadas sobre suelo horizontal con una rapidez inicial de $500\frac{m}{s}$ y un ángulo de lanzamiento de $60°$. ¿Cuál será la ubicación del proyectil $10s$ más tarde?

18. (r) Evalúe las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (t^3, 7, t+1)dt$,

b) $\int_0^1 (t\,e^{t^2}, e^{-t}, 1)dt$.

19. (r) Resuelva la ecuación diferencial $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ sujeta a la condición inicial $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, para $\mathbf{r}$ como función vectorial de t.

20. (*) Pruebe las siguientes propiedades, suponiendo que $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son funciones vectoriales (con valores en $\mathbb{R}^n$) integrables en $[a, b]$, $k \in \mathbb{R}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^n$

    a) $\int_a^b k\mathbf{r}_1(t)dt = k\int_a^b \mathbf{r}_1(t)dt$.

    b) $\int_a^b (\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t))dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t)dt \pm \int_a^b \mathbf{r}_2(t)dt$.

    c) $\int_a^b \mathbf{C} \cdot \mathbf{r}_1(t)dt = \mathbf{C} \cdot \int_a^b \mathbf{r}_1(t)dt$.

    d) Si $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ para todo $t \in [a, b]$, entonces $\int_a^b \mathbf{C} \times \mathbf{r}_1(t)dt = \mathbf{C} \times \int_a^b \mathbf{r}_1(t)dt$.

Longitud de arco en el plano y en el espacio

21. (o) Un planeador se eleva a lo largo de la hélice de ecuación $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \geq 0$. ¿Cuál es la longitud de la trayectoria del planeador, desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$?

22. (o) Consideremos la hélice dada por la ecuación

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

    y llamemos $t_0 = 0$.

    a) Encuentre el parámetro de la longitud de arco $s(t)$ a lo largo de la hélice desde t_0 hasta t.

    b) En la ecuación obtenida despeje t en función de s.

    c) Sustituya este valor $t(s)$ en la ecuación (1) para obtener la parametrización por longitud de arco para la hélice.

    d) ¿Cuáles son los puntos $\mathbf{r}(t(0))$, $\mathbf{r}(t(\sqrt{2}\pi))$, $\mathbf{r}(t(-1))$?

23. (r) Obtenga el vector tangente unitario a la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t, t^2)$, que representa la trayectoria de cierto planeador.

24. (o) En cada ejercicio obtenga el vector tangente unitario a la curva. También calcule la longitud de la parte indicada de la curva.

    a) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \sqrt{5}t\mathbf{k}, \qquad 0 \leq t \leq \pi$.

    b) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2}{3}t^{3/2}\mathbf{k}, \qquad 0 \leq t \leq 8$.

25. (r) Obtenga el punto en la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (5\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (5\cos t)\mathbf{j} + 12t\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$, que se encuentra a una distancia, a lo largo de la curva, de 26π unidades desde el punto $(0, 5, 0)$ y en la dirección en la que crece la longitud de arco.

26. (r) Obtenga el parámetro de longitud de arco a lo largo de la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 3t), t \in \mathbb{R},$$

    desde el punto donde $t = 0$, calculando la integral

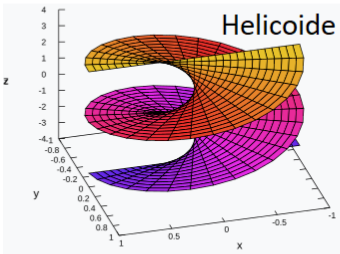
$$s = \int_0^t |\mathbf{v}(\tau)| d\tau.$$

    Luego, calcule la longitud de la parte de la curva para la cual $0 \leq t \leq \pi/2$.

Aplicación

27. Para construir un tornillo sin fin como los de la imagen (usados para mover engranajes de una máquina o para arrastrar material),

se puede pensar en una helicoide, que es una superficie (del tipo de las que estudiaremos en la unidad 4), constituida por la unión de hélices cilíndricas (como las presentadas en los ejercicios 21 y 22), como se ve en la imagen de la izquierda, a continuación:



Para construir este tipo de piezas, puede por ejemplo, utilizarse prensas o unirse porciones de material. En las imágenes de la derecha, se corta una corona circular y se la **dobla**, usando una prensa, para obtener la forma deseada. Acá entran en juego características del material, que permite hacer esto sin romperse o deformarse de maneras no deseadas.
La siguiente ecuación corresponde a una hélice, definida para valores de t en un intervalo $[a, b]$:

$$\mathbf{r}_0(t) = (\rho\cos(t), \rho\,\mathrm{sen}(t), \alpha t),\ a \leq t \leq b,$$

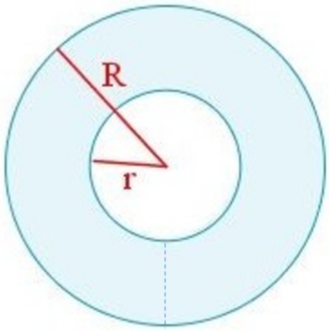
donde $\rho > 0$ y elegimos $\alpha > 0$. Trabajaremos en el intervalo $[a, b] = [0, 2\pi]$.

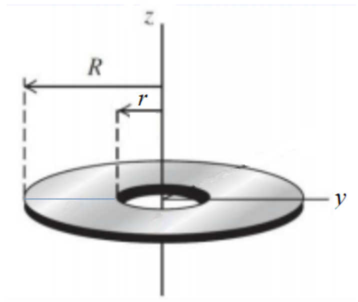
a) Realice un esbozo de la hélice.

b) ¿Qué representa el número ρ?

c) ¿Cuál es la influencia de α? Es decir, ¿qué cambia si α es pequeño o si es grande?

Se tiene una corona circular, como la de la imagen a continuación, que será cortada por la línea punteada para darle forma usando una prensa (como vimos en imágenes anteriores).





d) Para cada una de las circunferencias (la interior, de radio r, y la exterior, de radio R), calcule el perímetro.

e) Calcule las longitudes de las dos hélices que se obtienen al separar las partes de la corona circular a ambos lados de la línea punteada una distancia $\beta > 0$ (suponiendo que solo varían las cotas de los puntos de las curvas).

f) Calcule cuánto debe estirarse el material (compare las longitudes de una de las circunferencias y de la hélice correspondiente).