Trabajo Práctico 4

PARTE A: Integrales de Línea

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro "Cálculo de varias variables"de Thomas, décimosegunda edición, Ed. Pearson.
Los ejercicios (o secciones) pueden ser obligatorios (o), recomendados no obligatorios (r) y opcionales (*).

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|dt \qquad \text{Integral de línea de campo escalar}$$

$$\int_C \mathbf{F}(x,y,z)\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt \qquad \text{Integral de línea de campo vectorial}$$

Curvas

1. (o)Relacione la ecuaciones vectoriales con los gráficos dados:

   a) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j},\ 0 \le t \le 1.$

   b) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k},\ -1 \le t \le 1.$

   c) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 0),\ 0 \le t \le 2\pi.$

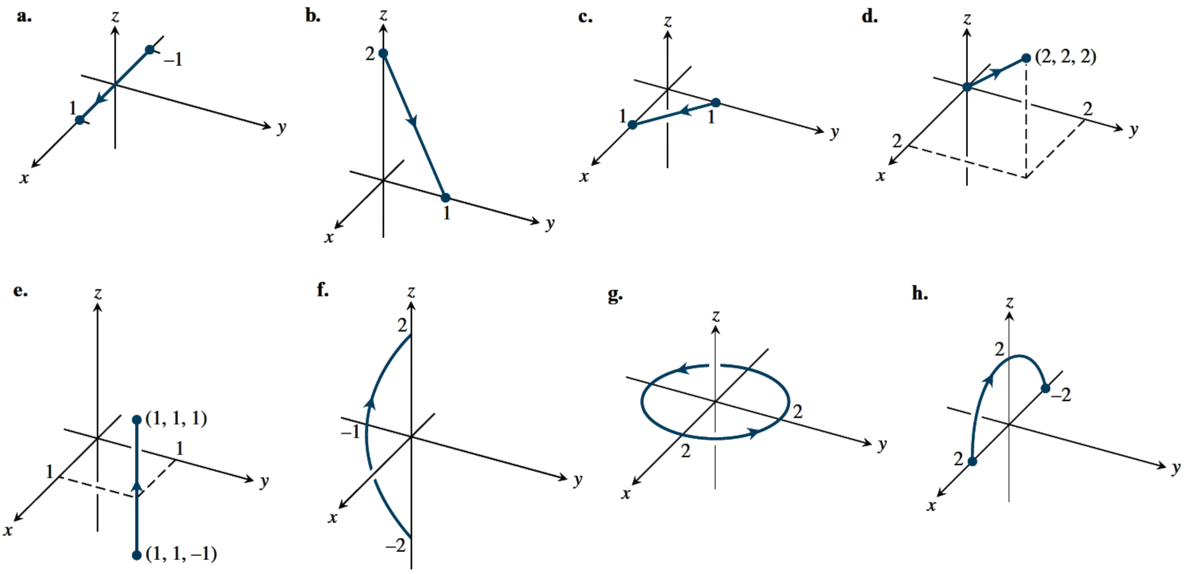
   d) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i},\ -1 \le t \le 1.$

   e) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k},\ 0 \le t \le 2.$

   f) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + (2-2t)\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1.$

   g) $\mathbf{r}(t) = (0, t^2-1, 2t),\ -1 \le t \le 1.$

   h) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 0, 2\operatorname{sen} t),\ 0 \le t \le \pi.$



Integrales de línea de campos escalares

2. Calcule:

   a) (o) $\int_C (x+y)ds$, donde C es el segmento de recta $\mathbf{r}(t) = (t, 1-t, 0)$, $0 \le t \le 1$.

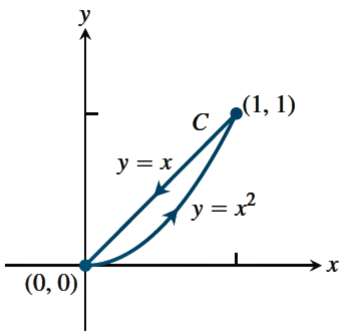
   b) (r) $\int_C (xy+y+z)ds$, donde C es el segmento de recta $\mathbf{r}(t) = (2t, t, 2-2t)$, $0 \le t \le 1$.

   c) (r) $\int_C x ds$, donde C es el segmento de recta $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{t}{2})$, $0 \le t \le 4$.

   d) (r) la integral de $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{3}}{x^2+y^2+z^2}$ sobre la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (t,t,t)$, $t \ge 1$.

   e) (r) la integral de $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$, sobre la trayectoria que va de $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$, por $C = C_1 \cup C_2$, con C_1: $\mathbf{r}_1(t) = (t, t^2, 0)$, $0 \le t \le 1$ y C_2: $\mathbf{r}_2(t) = (1,1,t)$, $0 \le t \le 1$.

   f) (o) $\int_C (x+\sqrt{y})ds$, donde C está dada en la figura.



   g) (o) la integral de $f(x,y,z) = -\sqrt{x^2+z^2}$, sobre la circunferencia C: $\mathbf{r}(t) = (0, a\cos t, a \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

   h) (r) la integral de línea de $f(x,y) = ye^{x^2}$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j}$, $-1 \le t \le 2$.

   i) (r) $\int_C f(x,y)ds$ donde $f(x,y) = \frac{\sqrt{y}}{x}$ y C viene dada por $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^4\mathbf{j}$, $\frac{1}{2} \le t \le 1$.

   j) (o) la integral de $f(x,y) = x^2 - y$ sobre la parte de C dada por $x^2 + y^2 = 4$ en el primer cuadrante, desde $(0,2)$ hasta $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

   k) (r) el área de uno de los lados de la "pared" que es ortogonal a la curva $2x + 3y = 6$, $0 \le x \le 6$, y está sobre la curva y bajo la superficie $f(x,y) = 4 + 3x + 2y$.

3. (r) Un alambre curvo de densidad $\delta(x,y,z) = 15\sqrt{y+2}$ está colocado sobre la curva C: $\mathbf{r}(t) = (t^2-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $-1 \le t \le 1$.

   a) Calcule la masa del alambre.

   b) Calcule el centro de masa del alambre.

   c) Represente el alambre y su centro de masa juntos.

4. (r) Encuentre la masa de un alambre delgado, colocado a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}t, \sqrt{2}t, 4-t^2)$, $0 \le t \le 1$, si la densidad es $\delta = 3t$.

Campos vectoriales, Gradientes e Integrales de Campos Vectoriales

5. (r) Represente gráficamente cada uno de los siguientes campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$.

   a) $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$
   b) $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$
   c) $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} - \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$
   d) $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$

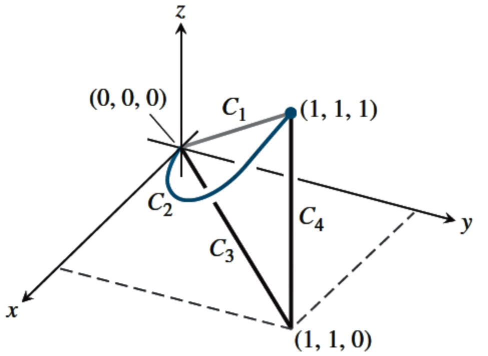
6. Determine el campo gradiente generado por:

   a) (o) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$
   b) (r) $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
   c) (r) $g(x, y, z) = e^z - \ln(x^2 + y^2)$
   d) (r) $g(x, y, z) = xy + yz + xz$

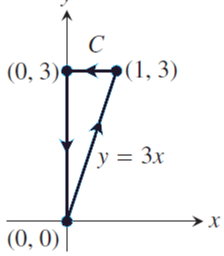
7. (o) Encuentre las integrales de línea de $\mathbf{F}$ desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ sobre cada una de las siguientes trayectorias (vea la figura), donde $\mathbf{F}(x, y, z)$ viene dado por

   - $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$
   - $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$

   a) La trayectoria es el segmento C_1 que va de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$.
   b) La trayectoria C_2, dada por $\mathbf{r}_2(t) = (t, t^2, t^4)$, $0 \leq t \leq 1$.
   c) La trayectoria $C_3 \cup C_4$, donde C_3 es el segmento de recta desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 0)$ y C_4, el segmento de recta desde $(1, 1, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$.



8. (o) Evalúe: $\displaystyle\int_C \sqrt{x + y}\, dx$, sobre la trayectoria que muestra la figura:



9. (r) Calcule las siguientes integrales a lo largo de la curva C dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -\cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

a) $\int_C xz\,dx$

b) $\int_C xz\,dy$

c) $\int_C xz\,dz$

10. (r) Dado el campo vectorial $\mathbf{F}$ de la figura 1 (abajo):

    a) Si C es una circunferencia unitaria centrada en el origen recorrida en sentido antihorario, la integral $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ ¿es positiva, negativa o nula? (Debe responder sin hacer cálculos).

    b) Marque en el gráfico una curva suave C_1 tal que $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ sea nula.

11. (r) Sea $\mathbf{F}$ dado por el gráfico de la figura 2 (abajo). Indique si cada una de las integrales de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de C_1 y C_2 es positiva, nula o negativa.

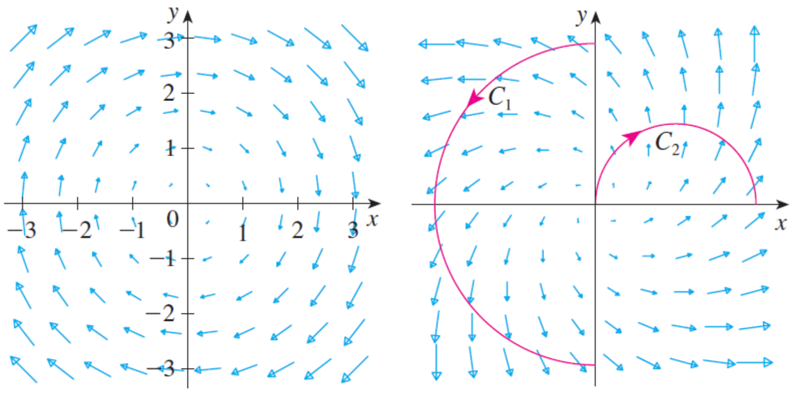


figura 1 figura 2

12. (r) Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F} = (xy, y, -yz)$ a lo largo de $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t),\ 0 \le t \le 1$, cuando t crece.

13. (r) Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F} = (z, x, y)$ a lo largo de $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t),\ 0 \le t \le 2\pi$, cuando t crece.

14. (r) Evalúe: $\displaystyle\int_C (x-y)dx + (x+y)dy$, sobre la trayectoria en sentido contrario a las manecillas del reloj, a lo largo del triángulo con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.

15. (r) Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x,y) = (xy, y-x)$ en la trayectoria recta desde $(1,1)$ hasta $(2,3)$.

16. (o) Calcule la circulación y el flujo de los campos $\mathbf{F}_1(x,y) = (x,y)$ y $\mathbf{F}_2(x,y) = (-y,x)$ alrededor y a través hacia fuera de las curvas C_1 y C_2, dadas respectivamente por $\mathbf{r}_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$, y $\mathbf{r}_2(t) = (\cos t, 4\operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

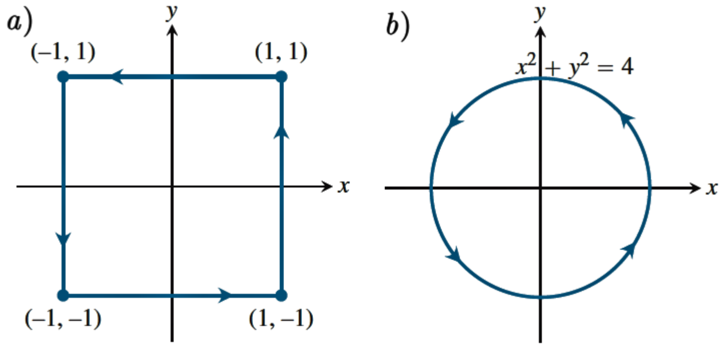
17. (r) Calcule el flujo del campo de velocidades $\mathbf{F} = (x+y, -x^2-y^2)$ a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias desde $(1,0)$ hasta $(-1,0)$ en el plano xy:

    a) la parte superior de la circunferencia $x^2+y^2=1$;

    b) el segmento de recta desde $(1,0)$ hasta $(-1,0)$;

    c) el segmento de recta desde $(1,0)$ hasta $(0,-1)$, seguido por el segmento de recta desde $(0,-1)$ hasta $(-1,0)$.

18. (o) Obtenga la circulación del campo $\mathbf{F} = (y, x+2y)$ alrededor de cada una de las siguientes trayectorias cerradas:



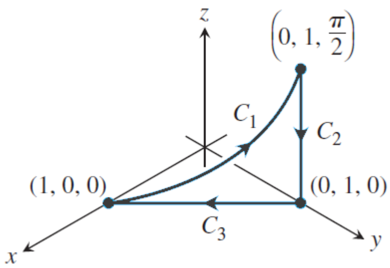
c) Use una trayectoria diferente de las de los incisos a y b, que sea cerrada y simple.

19. (r) Trace el campo radial dado por $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ junto con sus componentes horizontales y verticales, en un conjunto representativo de puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

20. (o) Trace el campo de rotación dado por $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}$ junto con sus componentes horizontales y verticales en un conjunto representativo de puntos del disco $x^2 + y^2 = 4$.

21. (r) Encuentre un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ en el plano xy con la propiedad de que en cada punto $(x, y) \neq (0, 0)$, $\mathbf{F}$ sea un vector unitario que apunta hacia el origen. (El campo no está definido en el origen.)

22. (r) Calcule la circulación de $\mathbf{F} = (2x, 2z, 2y)$ a lo largo de la curva C que es la unión de C_1: $\mathbf{r}_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, C_2: $\mathbf{r}_2(t) = (0, 1, (\frac{\pi}{2})(1-t))$, $0 \leq t \leq 1$ y C_3: $\mathbf{r}_3(t) = (t, (1-t), 0)$, $0 \leq t \leq 1$.



Campos conservativos

23. (r) ¿Cuáles de los siguientes campos son conservativos? En caso de serlo halle la función potencial.

   a) $\mathbf{F} = (y \operatorname{sen} z, x \operatorname{sen} z, xy \cos z)$

   b) $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

   c) $\mathbf{F} = (y + z, x + z, x + y)$

24. (r) Encuentre una función potencial para el campo vectorial $\mathbf{F} = e^{y+2z}(\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2x\mathbf{k})$.

25. (r) Encuentre una función potencial para el campo vectorial

$$\mathbf{F} = \frac{y}{1+x^2y^2}\mathbf{i} + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{z}{\sqrt{1-y^2z^2}}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2z^2}} + \frac{1}{z}\right)\mathbf{k}$$

.

26. (o) Compruebe que el integrando es una forma diferencial exacta y calcule la integral.

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xydx + (x^2 - z^2)dy - 2yzdz.$$

27. (o) Sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2, \frac{z^2}{y}, 2z \ln y)$.

   a) Dé el dominio de definición D de $\mathbf{F}$ (el mayor posible, en el sentido de la inclusión). Verifique que se trata de una región abierta, conexa y simplemente conexa.
   b) Mediante el criterio de componentes, compruebe que $3x^2\, dx + \frac{z^2}{y}\, dy + 2z \ln y\, dz$ es una forma diferencial exacta en D.
   c) Encuentre una función potencial para $\mathbf{F}$.
   d) Evalúe la integral de línea de $\mathbf{F}$ desde el punto $(1, 1, 1)$ hasta el punto $(1, 2, 3)$, por algún camino.

28. (r) Demuestre que el valor de la integral $\int_A^B z^2\, dx + 2y\, dy + 2xz\, dz$ no depende de la trayectoria desde A hasta B, con A y B, puntos en $\mathbb{R}^3$.

29. (r) Determine el trabajo realizado por $\mathbf{F} = (x^2 + y, y^2 + x, ze^z)$ para las siguientes trayectorias desde $(1, 0, 0)$ hasta $(1, 0, 1)$:

   a) El segmento de recta $x = 1$, $y = 0$, $0 \leq z \leq 1$.
   b) La hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, (\frac{t}{2\pi}))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
   c) El eje x desde $(1, 0, 0)$ hasta $(0, 0, 0)$, seguido de la parábola $z = x^2$, $y = 0$ desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 0, 1)$.

30. (r) Sea $\mathbf{F} = \nabla f$, con $f(x, y) = x^3y^2$, y sea C la trayectoria en el plano xy, que va desde $(-1, 1)$ hasta $(1, 1)$, y que consiste en el segmento de recta desde $(-1, 1)$ hasta $(0, 0)$, seguido del segmento de recta desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$. Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de dos maneras:

   a) Encuentre parametrizaciones para los segmentos que forman a C y evalúe la integral.
   b) Use f como una función potencial para $\mathbf{F}$.

Aplicaciones

31. (r) Demuestre que el trabajo realizado por un campo de fuerza constante $\mathbf{F} = (a, b, c)$ al mover una partícula a lo largo de cualquier trayectoria desde A hasta B es $W = \mathbf{F} \cdot \vec{AB}$.

32. (r)

   a) Encuentre una función potencial para el campo gravitacional

   $$\mathbf{F} = -GmM \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

   (G, m y M son constantes).
   b) Sean P_1 y P_2 puntos que se encuentran a distancias s_1 y s_2 desde el origen. Demuestre que el trabajo realizado por el campo gravitacional del inciso anterior, para mover una partícula desde P_1 hasta P_2, es

   $$GmM \left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1} \right).$$

33. (r) En algunas ramas de las ciencias naturales, como climatología, mecánica de fluidos, magnetismo, es usual encontrarse con campos vectoriales que representen fuentes de energía, sumideros, vórtices, y combinaciones de los anteriores. Es por ello que resulta de gran interés contar con modelos matemáticos que permitan estudiar estos fenómenos de manera adecuada.

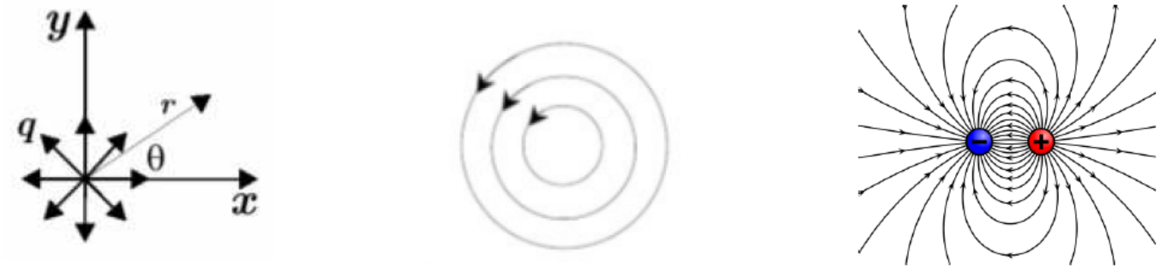


Figura 1. Fuente, vórtice y dipolo (superposición de fuente y sumidero separados una distancia dada).

Para modelar una fuente bidimensional consideramos un campo vectorial que a cada punto del plano le asigne el vector posición de dicho punto, es decir:

$$\mathbf{F}_1(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Para modelar un vórtice en sentido anti horario, tomamos un campo que a cada punto del plano le asigne su vector posición, pero rotado 90° en sentido anti horario:

$$\mathbf{F}_2(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

a) Calcule la circulación del campo fuente $\mathbf{F}_1$ a lo largo de la curva C_1, que es el cuarto de circunferencia con centro en el origen y radio $r = 2$ en el primer cuadrante (en sentido anti horario). Interprete el resultado.

b) Calcule la circulación del vórtice $\mathbf{F}_2$ a lo largo de la curva C_2, que es el segmento de recta en el primer cuadrante entre las circunferencias de radios $r = 1$ y $r = 4$, a 45 de inclinación con respecto al semieje x positivo. Interprete el resultado.

34. (r) El campo eléctrico generado por un dipolo formado por dos cargas opuestas, q y $-q$, ubicadas respectivamente en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$, viene dado por

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x-1}{((x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x+1}{((x+1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{((x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y}{((x+1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

a) Halle la función potencial electrostático V en cada punto del plano.

b) Superponga un gráfico de curvas de nivel de V con un gráfico del campo vectorial $\mathbf{E}$. Encuentre una relación entre las líneas de flujo del campo $\mathbf{E}$ y las líneas equipotenciales (es decir, las curvas de nivel de la función potencial V).

c) Repita este ejercicio para el campo eléctrico generado por una única carga puntual (fuente).

Teorema de Green

35. (o) Verifique el teorema de Green para: $\mathbf{F} = (-y, x)$ con dominio en el disco R dado por $x^2 + y^2 \leq a^2$ y su circunferencia frontera C dada por $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, con $a > 0$.

36. (r) Verifique el teorema de Green para: $\mathbf{F} = (-x^2 y, xy^2)$ con dominio en el disco R dado por $x^2 + y^2 \leq a^2$ y su circunferencia frontera C dada por $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, con $a > 0$.

37. (r) Utilice el teorema de Green para calcular la circulación en sentido antihorario y el flujo hacia fuera para cada uno de los siguientes campos $\mathbf{F}$ y curvas C.

a) $\mathbf{F} = (x^2 + 4y, x + y^2)$; C, frontera del cuadrado acotado por las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$.

b) $\mathbf{F} = (xy + y^2, x - y)$; C, dada en la figura 1.

c) $\mathbf{F} = (x + 3y)\mathbf{i} + (2x - y)\mathbf{j}$; C, es la elipse dada en la figura 2.

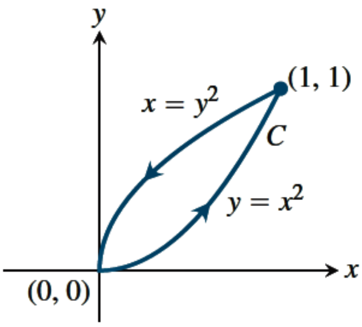


figura 1

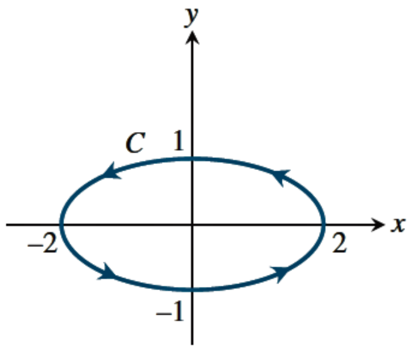


figura 2

38. (r) Calcule la circulación en contra de las manecillas del reloj y el flujo hacia fuera del campo $\mathbf{F} = (xy, y^2)$ alrededor y sobre la frontera de la región encerrada por las curvas $y = x^2$ y $y = x$ en el primer cuadrante.

39. (r) Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = (2xy^3, 4x^2y^2)$ al mover una vez una partícula en sentido antihorario, a lo largo de curva C que es la frontera de la región en el primer cuadrante encerrada por el eje x, la recta $x = 1$ y la curva $y = x^3$.

40. (o) Aplicando el teorema de Green calcule:

a) $\displaystyle\oint_C (y^2dx + x^2dy)$, donde C es la frontera del triángulo delimitado por $x = 0$, $x+y = 1$ e $y = 0$.

b) El área de la región encerrada por la elipse parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Recuerde que si una curva suave por partes, cerrada simple en el plano, C, encierra una región plana R, el área de R se puede hallar como $\displaystyle\frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx$.

c) El área de la región encerrada por la astroide $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\mathrm{sen}^3\,t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

41. (r) Sea C la frontera de una región sobre la cual se cumple el teorema de Green. Use el mismo para calcular

a) $\oint f(x)\,dx + g(y)\,dy$

b) $\oint ky\,dx + hx\,dy$, k y h son constantes.

42. (r) Sea A el área y $\bar{x}$ la coordenada x del centroide de la placa plana que se encuentra en la región R acotada por la curva suave por partes C, simple y cerrada en el plano xy. Demuestre que

$$\frac{1}{2}\oint_C x^2dy = -\oint_C xy\,dx = \frac{1}{3}\oint_C x^2dy - xy\,dx = A\bar{x}.$$

43. (*) Suponiendo que todas las derivadas necesarias existen y son continuas, demuestre que si $f(x,y)$ satisface la ecuación de Laplace

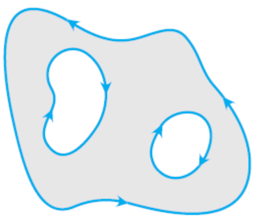
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

entonces

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0$$

para todas las curvas cerradas C, a las cuales se aplica el teorema de Green.

44. (*) El teorema de Green se cumple para una región R con un número finito de agujeros, siempre que las curvas de la frontera sean simples cerradas y suaves, y que integremos sobre cada componente de la frontera en la dirección en que R se mantiene a izquierda mientras avanzamos.



   a) Sean $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ y C la circunferencia $x^2+y^2=a^2$. Evalúe la integral de flujo

$$\oint_C \nabla f \cdot \mathbf{n}\, ds.$$

   b) Sea K una curva arbitraria suave simple cerrada en el plano, que no pase por el punto $(0,0)$. Utilice el teorema de Green para demostrar que

$$\oint_K \nabla f \cdot \mathbf{n}\, ds$$

   tiene dos posibles valores, dependiendo de que $(0,0)$ esté adentro o afuera de K.

Ejercicios tomados en exámenes (*)

45. Enuncie en forma completa y demuestre el Teorema de Green (un caso particular).

46. Dados el campo escalar $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ y el campo vectorial $\mathbf{F} = \nabla f$, indique justificando cada respuesta:

   a) cuáles son los dominios de f y $\mathbf{F}$.

   b) Calcule la integral $\displaystyle\int_C \nabla f \cdot \mathbf{T}\, ds$ donde C es la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=4$ recorrida en sentido positivo.

   c) Indique si $\mathbf{F}$ es o no conservativo en su dominio.

47. *a*) Calcule el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y,x,z)$ a lo largo de la curva C que es la intersección del cilindro $x^2+y^2=4$ y el plano $x+y+z=1$.

   b) Indique, justificando su respuesta, si el campo vectorial $\mathbf{F}$ es o no conservativo.

c) Halle la divergencia de $\mathbf{F}$ en el punto $(0, 0, 0)$ e interprete.

48. Sea $f(x, y, z) = x - y^2 - z^2$ una función que representa la densidad de un material en cada punto del alambre fino cuyos puntos se encuentran sobre la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (t + 1, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$. Calcule la masa del mismo.