

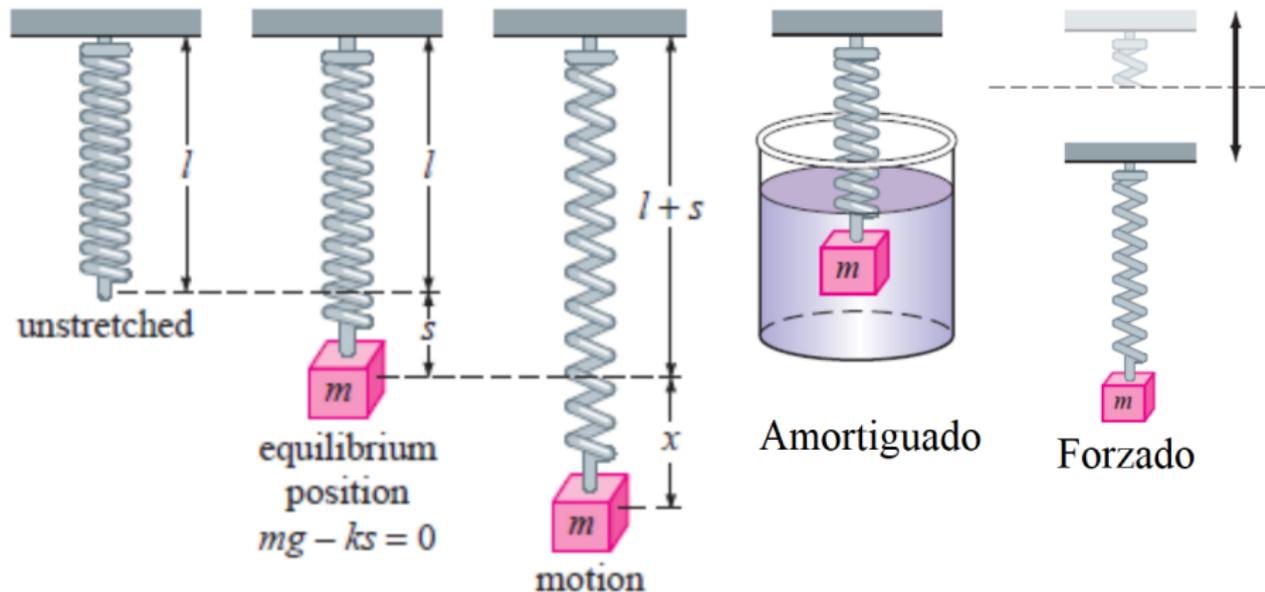
Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

Facultad de Ingeniería

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
 - PVI y PVF
 - Dependencia e independencia lineal de soluciones
 - Teorema de solución general de una EDO lineal homogénea
 - EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
 - Teoremas
 - Métodos para resolver EDOs lineales de orden superior con coeficientes constantes
 - Método de los coeficientes indeterminados
 - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte
- 5 Demostraciones y desarrollos

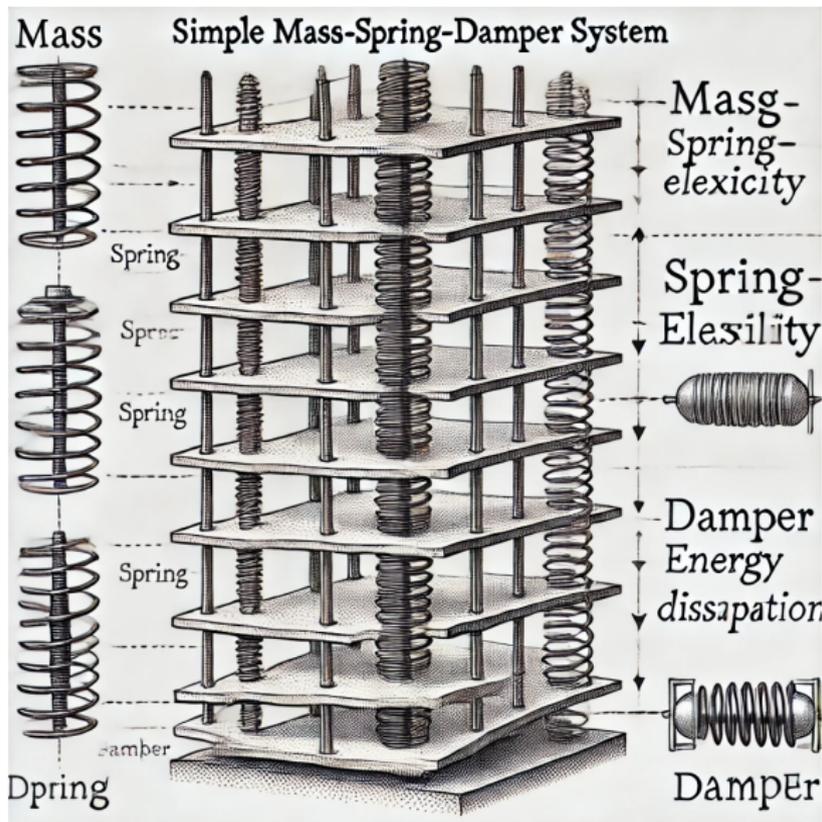
- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
 - PVI y PVF
 - Dependencia e independencia lineal de soluciones
 - Teorema de solución general de una EDO lineal homogénea
 - EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
 - Teoremas
 - Métodos para resolver EDOs lineales de orden superior con coeficientes constantes
 - Método de los coeficientes indeterminados
 - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte
- 5 Demostraciones y desarrollos

Movimiento en un sistema masa-resorte

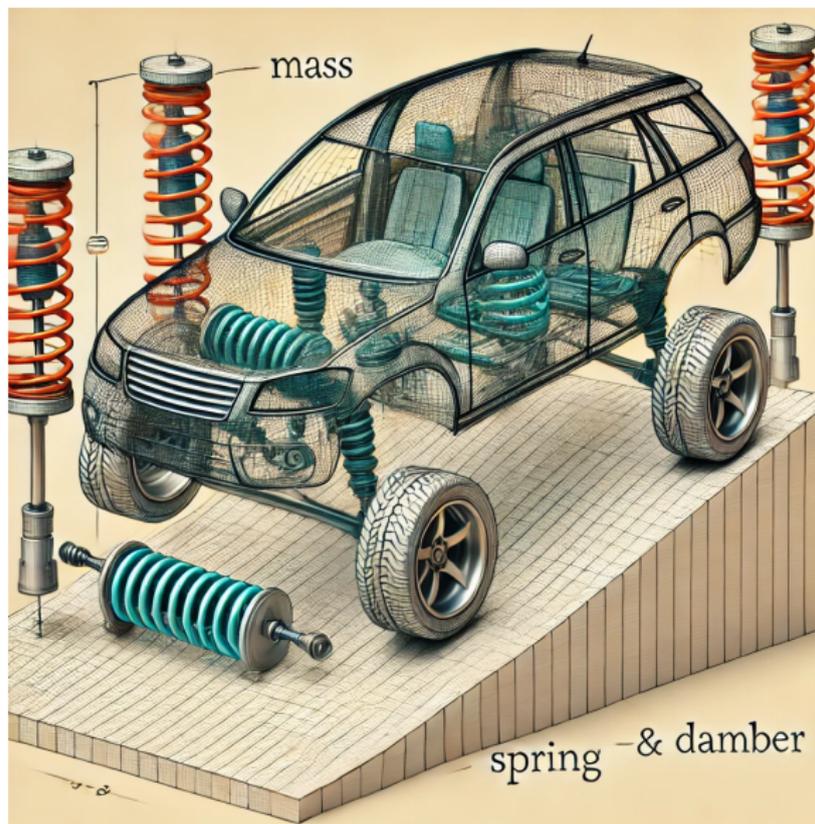


$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

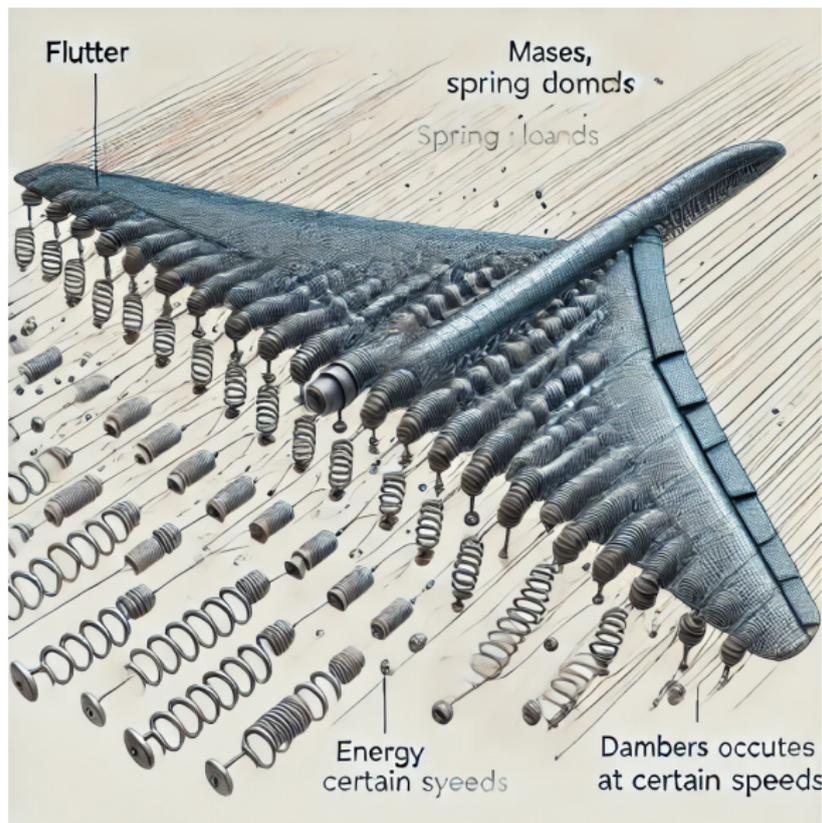
Aplicaciones



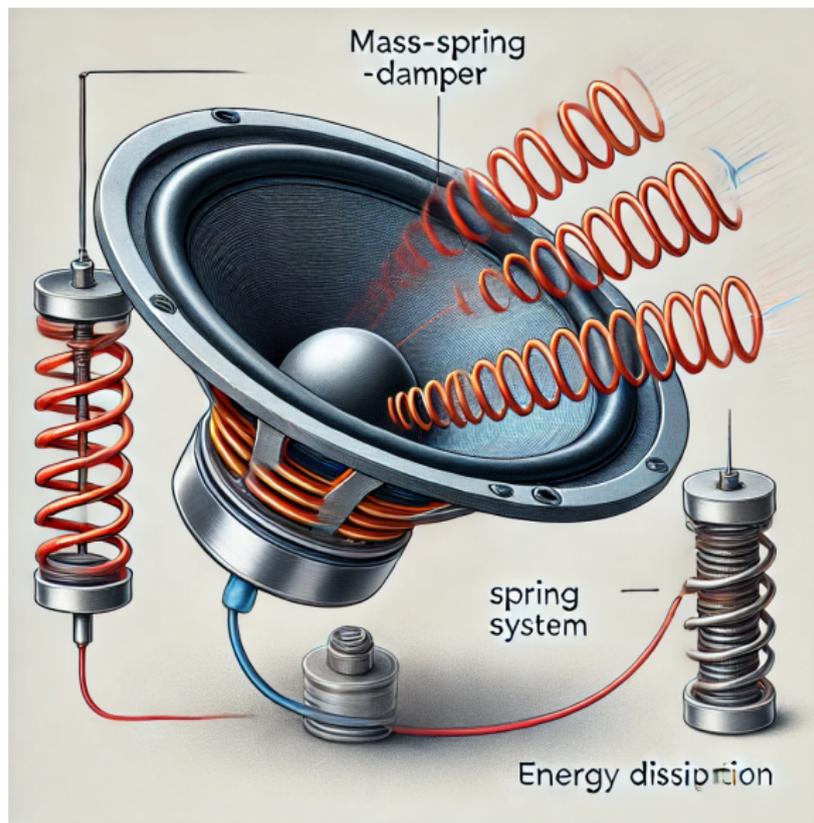
Aplicaciones



Aplicaciones



Aplicaciones



Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P , Q , R continuas en un intervalo abierto I . $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P , Q , R continuas en un intervalo abierto I . $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

La ecuación

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

se llama **homogénea** y

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

se llama **no homogénea** si $G(x) \neq 0$ para alguna $x \in I$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P , Q , R continuas en un intervalo abierto I . $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

La ecuación

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

se llama **homogénea** y

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

se llama **no homogénea** si $G(x) \neq 0$ para alguna $x \in I$.

La **ecuación homogénea asociada** a

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

es

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0.$$

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas**
 - PVI y PVF
 - Dependencia e independencia lineal de soluciones
 - Teorema de solución general de una EDO lineal homogénea
 - EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
 - Teoremas
 - Métodos para resolver EDOs lineales de orden superior con coeficientes constantes
 - Método de los coeficientes indeterminados
 - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte
- 5 Demostraciones y desarrollos

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
 - PVI y PVF
 - Dependencia e independencia lineal de soluciones
 - Teorema de solución general de una EDO lineal homogénea
 - EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
 - Teoremas
 - Métodos para resolver EDOs lineales de orden superior con coeficientes constantes
 - Método de los coeficientes indeterminados
 - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte
- 5 Demostraciones y desarrollos

Existencia de solución única a un PVI

Llamemos (1) al PVI

$$\begin{cases} a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x) y = g(x), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \cdots, \quad y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \quad (1)$$

Teorema (Existencia de una solución única)

Sean $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, \cdots , $a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda $x \in I$. Si x_0 es cualquier punto en I , entonces **existe una única** solución del PVI (1) en I .

Sin demostrar.

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

Problema con valores en la frontera: PVF

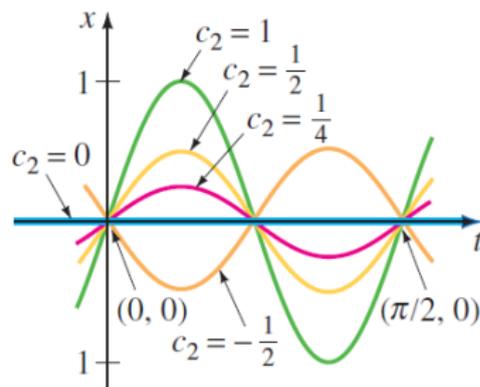
Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

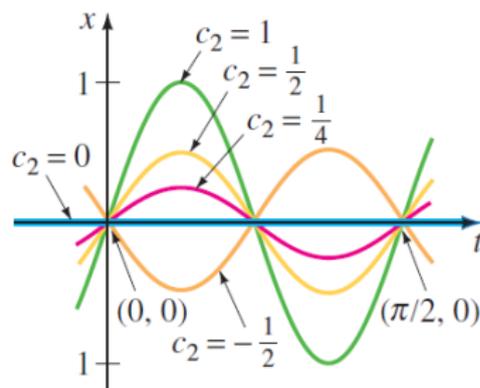
$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sen(4t).$$

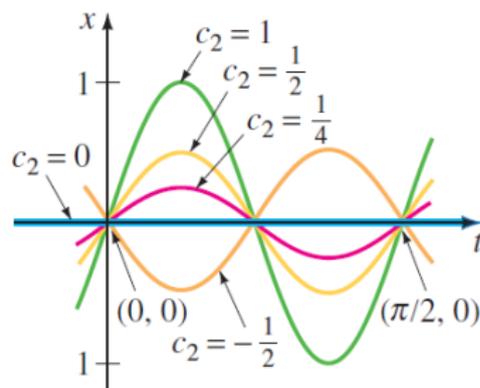


a) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0.$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t).$$

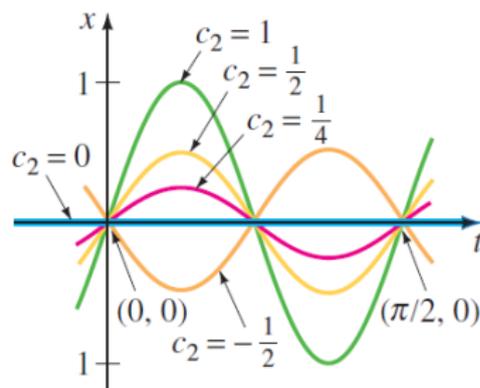


a) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
 $x(0) = c_1 + 0 = 0;$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t).$$

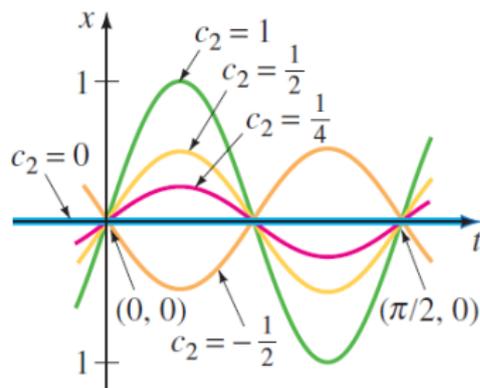


- a) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
 $x(0) = c_1 + 0 = 0;$
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t).$$



a) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0.$

$$x(0) = c_1 + 0 = 0;$$

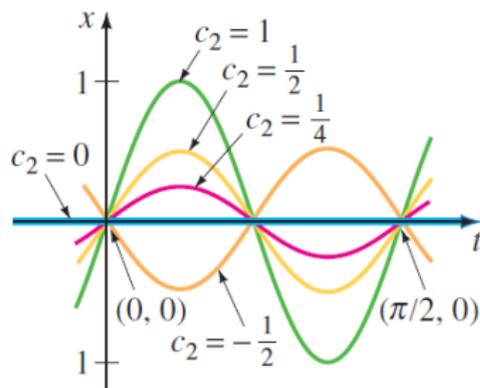
$$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$$

$$x(t) = c_2 \sin(4t).$$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t).$$



a) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0.$ b) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0.$

$$x(0) = c_1 + 0 = 0;$$

$$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$$

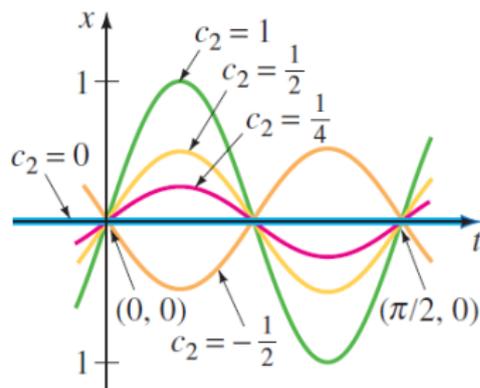
$$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$$

Tiene infinitas
soluciones.

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t).$$



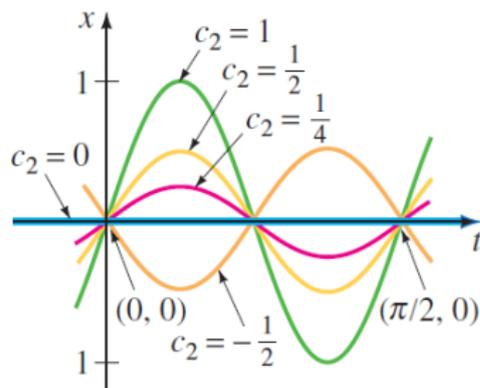
- a) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0.$ b) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
 $x(0) = c_1 + 0 = 0;$ $x(0) = c_1 + 0 = 0;$
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
 $x(t) = c_2 \sin(4t).$

**Tiene infinitas
soluciones.**

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t).$$



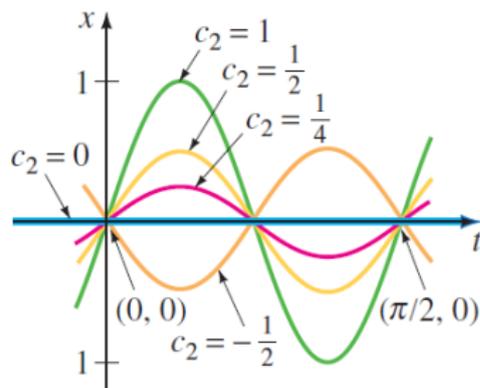
- a) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0.$ b) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
 $x(0) = c_1 + 0 = 0;$ $x(0) = c_1 + 0 = 0;$
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$ $x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
 $x(t) = c_2 \sin(4t).$

**Tiene infinitas
soluciones.**

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t).$$



a) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0.$

$$x(0) = c_1 + 0 = 0;$$

$$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$$

$$x(t) = c_2 \sin(4t).$$

Tiene infinitas
soluciones.

b) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0.$

$$x(0) = c_1 + 0 = 0;$$

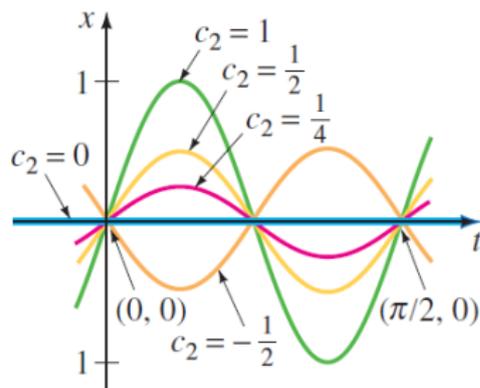
$$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$$

Tiene solución única
 $x \equiv 0.$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t).$$

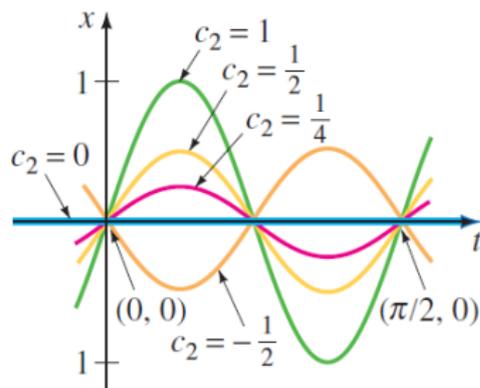


- a) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0.$ b) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0.$ c) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
 $x(0) = c_1 + 0 = 0;$ $x(0) = c_1 + 0 = 0;$ $x(0) = c_1 + 0 = 0;$
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$ $x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
 $x(t) = c_2 \sin(4t).$ **Tiene solución única**
Tiene infinitas **$x \equiv 0.$**
soluciones.

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t).$$



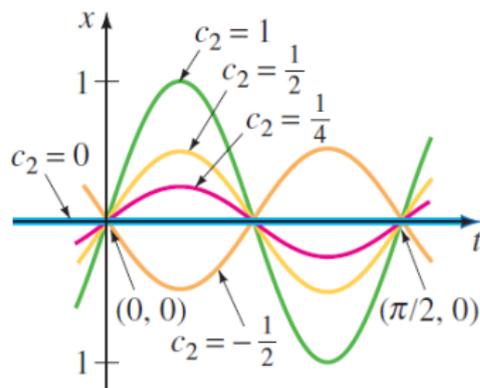
- a) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0.$ b) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0.$ c) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
 $x(0) = c_1 + 0 = 0;$ $x(0) = c_1 + 0 = 0;$ $x(0) = c_1 + 0 = 0;$
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$ $x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
 $x(t) = c_2 \sin(4t).$ **Tiene solución única**
 $x \equiv 0.$

Tiene infinitas soluciones.

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t).$$



- a) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0.$ b) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0.$ c) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
 $x(0) = c_1 + 0 = 0;$ $x(0) = c_1 + 0 = 0;$ $x(0) = c_1 + 0 = 0;$
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$ $x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$ $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1;$
 $x(t) = c_2 \sin(4t).$

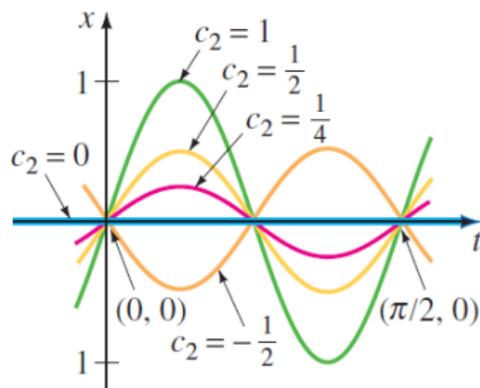
Tiene infinitas
soluciones.

Tiene solución única
 $x \equiv 0.$

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t).$$

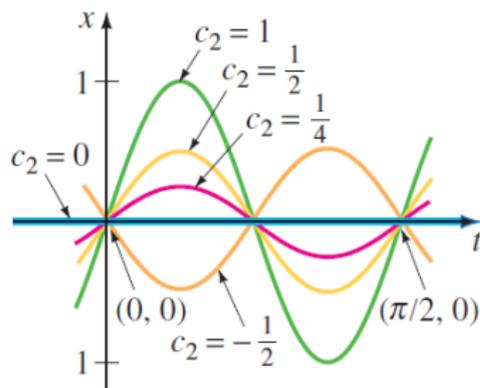


- a) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
 $x(0) = c_1 + 0 = 0;$
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
 $x(t) = c_2 \sin(4t).$
Tiene infinitas soluciones.
- b) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
 $x(0) = c_1 + 0 = 0;$
 $x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única
 $x \equiv 0.$
- c) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
 $x(0) = c_1 + 0 = 0;$
 $x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1;$
No tiene solución.

Problema con valores en la frontera: PVF

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t).$$



a) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0.$

$$\begin{aligned}x(0) &= c_1 + 0 = 0; \\x(\frac{\pi}{2}) &= c_1 + 0 = 0; \\x(t) &= c_2 \sin(4t).\end{aligned}$$

Tiene infinitas
soluciones.

b) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0.$

$$\begin{aligned}x(0) &= c_1 + 0 = 0; \\x(\frac{\pi}{8}) &= 0 + c_2 = 0.\end{aligned}$$

Tiene solución única
 $x \equiv 0.$

c) $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 1.$

$$\begin{aligned}x(0) &= c_1 + 0 = 0; \\x(\frac{\pi}{2}) &= c_1 + 0 = 1;\end{aligned}$$

No tiene solución.

¿CONCLUSIÓN?

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma ED, cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2 .

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma ED, cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2 .

Demostrado en la próxima diapositiva.

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma ED, cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2 .

Demostrado en la próxima diapositiva.

Observaciones:

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma ED, cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2 .

Demostrado en la próxima diapositiva.

Observaciones:

- 1) La solución trivial $y \equiv 0$ siempre es una solución de cualquier ED lineal homogénea.
- 2) Combinaciones lineales.

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Demostramos el caso $n = 2$;

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Demostramos el caso $n = 2$; veamos que $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ satisface la ED

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0.$$

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Demostramos el caso $n = 2$; veamos que $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ satisface la ED

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0.$$

Derivamos g :

$$g'(x) = c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x); \quad g''(x) = c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x).$$

y sustituimos en la ED:

$$\begin{aligned} a_2(x)g''(x) + a_1(x)g'(x) + a_0(x)g(x) &= \\ &= a_2(x)(c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x)) + a_1(x)(c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x)) \\ &\quad + a_0(x)(c_1y_1(x) + c_2y_2(x)) \\ &= c_1(a_2(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)) \\ &\quad + c_2(a_2(x)y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
 - PVI y PVF
 - Dependencia e independencia lineal de soluciones
 - Teorema de solución general de una EDO lineal homogénea
 - EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
 - Teoremas
 - Métodos para resolver EDOs lineales de orden superior con coeficientes constantes
 - Método de los coeficientes indeterminados
 - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte
- 5 Demostraciones y desarrollos

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

- ① La familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es **linealmente dependiente** (LD) en I si existen c_1, \dots, c_n **no todos nulos** tales que

$$c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = \mathbf{0}$$

$$c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0, t \in I.$$

- ② La familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es **linealmente independiente** (LI) en I en otro caso.
- ③ Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

- 1 La familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es **linealmente dependiente** (LD) en I si existen c_1, \dots, c_n **no todos nulos** tales que

$$c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = \mathbf{0}$$

$$c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0, t \in I.$$

- 2 La familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es **linealmente independiente** (LI) en I en otro caso.
- 3 Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0, 1]$.
- 4 Mismo ejemplo en $[-1, 1]$.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

- 1 La familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es **linealmente dependiente** (LD) en I si existen c_1, \dots, c_n **no todos nulos** tales que

$$c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = \mathbf{0}$$

$$c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0, t \in I.$$

- 2 La familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es **linealmente independiente** (LI) en I en otro caso.
- 3 Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0, 1]$.
- 4 Mismo ejemplo en $[-1, 1]$. $\{f_1, f_2\}$ es LI en $[-1, 1]$.
- 5 $\{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1(x) = 1$; $f_2(x) = \text{sen}^2(x)$; $f_3(x) = \text{cos}(2x)$.

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

- 1 La familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es **linealmente dependiente** (LD) en I si existen c_1, \dots, c_n **no todos nulos** tales que

$$c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = \mathbf{0}$$

$$c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0, t \in I.$$

- 2 La familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es **linealmente independiente** (LI) en I en otro caso.
- 3 Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0, 1]$.
- 4 Mismo ejemplo en $[-1, 1]$. $\{f_1, f_2\}$ es LI en $[-1, 1]$.
- 5 $\{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1(x) = 1$; $f_2(x) = \text{sen}^2(x)$; $f_3(x) = \text{cos}(2x)$. No es LI (en ningún $I \subset \mathbb{R}$).

Definición

El Wronskiano de una familia $\{f_1, \dots, f_n\}$ de n funciones derivables hasta el orden $n - 1$ al menos, es la función dada por el determinante

$$W_{(f_1, \dots, f_n)}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Propiedades del Wronskiano

Si $\{f_1, \dots, f_n\}$ es una familia LD en I y las funciones son suficientemente derivables, entonces $W_{(f_1, \dots, f_n)}(x) = 0$ para toda $x \in I$.

Contrarrecíproco: si **existe una** $x \in I$ tal que $W_{(f_1, \dots, f_n)}(x) \neq 0$, entonces $\{f_1, \dots, f_n\}$ es una familia **LI** en I .

Teorema

Sean y_1, y_2, \dots, y_n *soluciones* de la ED

$a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$ en I . Entonces

$\{y_1, \dots, y_n\}$ es LI en I *si y solo si* $W_{(y_1, \dots, y_n)}(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Sin demostrar.

Teorema

Sean y_1, y_2, \dots, y_n **soluciones** de la ED

$a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$ en I . Entonces

$\{y_1, \dots, y_n\}$ es LI en I **si y solo si** $W_{(y_1, \dots, y_n)}(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Sin demostrar.

Conjunto fundamental de soluciones de una ED de orden n : una familia LI de n soluciones de la ED en un intervalo I .

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
 - PVI y PVF
 - Dependencia e independencia lineal de soluciones
 - Teorema de solución general de una EDO lineal homogénea
 - EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
 - Teoremas
 - Métodos para resolver EDOs lineales de orden superior con coeficientes constantes
 - Método de los coeficientes indeterminados
 - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte
- 5 Demostraciones y desarrollos

Teoremas (ED lineal homogénea)

Teorema (Existencia de conjunto fundamental)

*Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$, tal que cada una de las funciones coeficientes a_k es continua en un intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ en I , existe un conjunto fundamental de soluciones en I , $\{y_1, \dots, y_n\}$.
(Sin demostrar.)*

Teorema (Teorema de solución general de ED lineal homogénea)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$, tal que cada una de las funciones coeficientes a_k es continua en un intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ en I , si $\{y_1, \dots, y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ED en I , la solución general se puede expresar como

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n.$$

SIN DEMOSTRAR

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
 - PVI y PVF
 - Dependencia e independencia lineal de soluciones
 - Teorema de solución general de una EDO lineal homogénea
 - EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
 - Teoremas
 - Métodos para resolver EDOs lineales de orden superior con coeficientes constantes
 - Método de los coeficientes indeterminados
 - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte
- 5 Demostraciones y desarrollos

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y(x) = e^{rx} \quad y'(x) = r e^{rx} \quad y''(x) = r^2 e^{rx}$$

En la ED:

$$ar^2 e^{rx} + br e^{rx} + ce^{rx} = 0$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y(x) = e^{rx} \quad y'(x) = r e^{rx} \quad y''(x) = r^2 e^{rx}$$

En la ED:

$$ar^2 e^{rx} + br e^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y(x) = e^{rx} \quad y'(x) = r e^{rx} \quad y''(x) = r^2 e^{rx}$$

En la ED:

$$ar^2 e^{rx} + br e^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

ECUACIÓN AUXILIAR

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$(a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0 = 0)$$

ED homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y(x) = e^{rx} \quad y'(x) = r e^{rx} \quad y''(x) = r^2 e^{rx}$$

En la ED:

$$ar^2 e^{rx} + br e^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

ECUACIÓN AUXILIAR

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$(a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0 = 0)$$

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$y_1 = e^{r_1x}$ y $y_2 = e^{r_2x}$ son soluciones de la ED;
probamos que son LI en $I = \mathbb{R}$:

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$y_1 = e^{r_1x}$ y $y_2 = e^{r_2x}$ son soluciones de la ED;
probamos que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$W_{(y_1, y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} \end{vmatrix} = e^{(r_1+r_2)x}(r_2 - r_1) \neq 0.$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$y_1 = e^{r_1x}$ y $y_2 = e^{r_2x}$ son soluciones de la ED;
probamos que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$W_{(y_1, y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} \end{vmatrix} = e^{(r_1+r_2)x}(r_2 - r_1) \neq 0.$$

Solución general:

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

es solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

- 1 Expresar la ecuación del movimiento:

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

- 1 Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

- 1 Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
- 2 Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales:

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

- 1 Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
- 2 Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

- 1 Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
- 2 Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
- 3 Resuelva:

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

- 1 Expresar la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
- 2 Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.

- 3 Resuelva: $r^2 + 5r + 4 = 0$; $r_1 = -4$; $r_2 = -1$;
 $y(t) = c_1e^{-4t} + c_2e^{-t}$; $y(0) = c_1 + c_2 = 1$;
 $y'(t) = -4c_1e^{-4t} - c_2e^{-t}$; $y'(0) = -4c_1 - c_2 = 0$;

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -4c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

- 1 Expresar la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
- 2 Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.

- 3 Resuelva: $r^2 + 5r + 4 = 0$; $r_1 = -4$; $r_2 = -1$;
 $y(t) = c_1e^{-4t} + c_2e^{-t}$; $y(0) = c_1 + c_2 = 1$;
 $y'(t) = -4c_1e^{-4t} - c_2e^{-t}$; $y'(0) = -4c_1 - c_2 = 0$;

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -4c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{4}{3}e^{-t}.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0;$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$ (es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$:

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$ (es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$y_2 = xe^{rx};$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$ (es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y_2' = (1 + rx)e^{rx};$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$ (es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$ (es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= ((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x)e^{rx} = 0 \end{aligned}$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$ (es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= ((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x)e^{rx} = 0 \end{aligned}$$

$$W_{(y_1, y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (1 + rx)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}(1 + xr - xr) = e^{2rx} \neq 0.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$ (es sol.); probamos que $y_2 = xe^{rx}$ es solución de la ED y que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2x)e^{rx};$$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= ((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x)e^{rx} = 0 \end{aligned}$$

$$W_{(y_1, y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (1 + rx)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}(1 + xr - xr) = e^{2rx} \neq 0.$$

Solución general:

$$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$$

es solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0;$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r_1 = \alpha + i\beta; \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r_1 = \alpha + i\beta; \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r_1 = \alpha + i\beta; \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)); \quad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x))$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r_1 = \alpha + i\beta; \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)); \quad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x))$$

$$y_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = -\frac{i}{2}z_1 + \frac{i}{2}z_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r_1 = \alpha + i\beta; \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)); \quad z_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x))$$

$$y_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = -\frac{i}{2}z_1 + \frac{i}{2}z_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ y $y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$ son soluciones de la ED; probemos que son LI en $I = \mathbb{R}$.

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$
$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x} \text{sen}(\beta x)$$

$$W_{(y_1, y_2)}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & e^{\alpha x} \text{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} \text{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x} \text{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x} \cos(\beta x) \end{vmatrix}$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$W_{(y_1, y_2)}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x} \cos(\beta x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha x} \begin{vmatrix} \cos(\beta x) & \operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha \cos(\beta x) - \beta \operatorname{sen}(\beta x) & \alpha \operatorname{sen}(\beta x) + \beta \cos(\beta x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha x} (\cos(\beta x)(\alpha \operatorname{sen}(\beta x) + \beta \cos(\beta x)) - \operatorname{sen}(\beta x)(\alpha \cos(\beta x) - \beta \operatorname{sen}(\beta x)))$$

$$= e^{2\alpha x} (\beta \cos^2 x + \beta \operatorname{sen}^2 x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$W_{(y_1, y_2)}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x} \cos(\beta x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha x} \begin{vmatrix} \cos(\beta x) & \operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha \cos(\beta x) - \beta \operatorname{sen}(\beta x) & \alpha \operatorname{sen}(\beta x) + \beta \cos(\beta x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha x} (\cos(\beta x)(\alpha \operatorname{sen}(\beta x) + \beta \cos(\beta x)) - \operatorname{sen}(\beta x)(\alpha \cos(\beta x) - \beta \operatorname{sen}(\beta x)))$$

$$= e^{2\alpha x} (\beta \cos^2 x + \beta \operatorname{sen}^2 x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

Solución general:

$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta x))$ es solución general de
 $ay'' + by' + cy = 0$.

Ejercicios

- 1 La ED de un sistema masa-resorte es: $2y''(t) + 10y'(t) + 8y(t) = 0$.
 - 1 Interprete cada término.
 - 2 Indique si se trata de la ecuación de un movimiento libre o forzado, amortiguado o no amortiguado.
 - 3 Resolver el PVI dado por la ED y las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
 - 4 Halle posición y velocidad de la masa en $t = 1$.
- 2 Resuelva $16y''(x) + 8y'(x) + y(x) = 0$.
- 3 Resuelva $\ddot{x}(t) + 8\dot{x}(t) + 25x(t) = 0$.

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
 - PVI y PVF
 - Dependencia e independencia lineal de soluciones
 - Teorema de solución general de una EDO lineal homogénea
 - EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
 - Teoremas
 - Métodos para resolver EDOs lineales de orden superior con coeficientes constantes
 - Método de los coeficientes indeterminados
 - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte
- 5 Demostraciones y desarrollos

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
 - PVI y PVF
 - Dependencia e independencia lineal de soluciones
 - Teorema de solución general de una EDO lineal homogénea
 - EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
 - Teoremas
 - Métodos para resolver EDOs lineales de orden superior con coeficientes constantes
 - Método de los coeficientes indeterminados
 - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte
- 5 Demostraciones y desarrollos

FUNCIÓN O SOLUCIÓN COMPLEMENTARIA

Dada una ED no homogénea, $ay'' + by' + cy = G(x)$, la solución de la ED homogénea asociada

$$ay'' + by' + cy = 0$$

se llama **FUNCIÓN COMPLEMENTARIA** o **SOLUCIÓN COMPLEMENTARIA**.

Teorema de solución general de EDO lineal no homogénea

Teorema

Dada una EDO lineal $a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x)$ donde las funciones coeficientes a_k , $0 \leq k \leq n$, y G son continuas en algún intervalo abierto I y $a_n(x) \neq 0$ en I . Entonces la solución general de la EDO tiene la forma $y = y_c + y_p$ donde y_c es la **función complementaria** y y_p es **cualquier** solución particular de la ecuación no homogénea.

Demostrar.

Principio de superposición ecuaciones lineales no homogéneas

Sean las k ecuaciones diferenciales no homogéneas de n -ésimo orden

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_1(x),$$

⋮

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_k(x),$$

donde sólo cambian los términos independientes. Supongamos que y_{p_1}, \dots, y_{p_k} son soluciones particulares de cada una de las ecuaciones anteriores, en un mismo intervalo I . Entonces,

$$y_p = y_{p_1} + \dots + y_{p_k}$$

es una solución particular de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g_1 + \dots + g_k.$$

Demostración dejada como ejercicio.

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
 - PVI y PVF
 - Dependencia e independencia lineal de soluciones
 - Teorema de solución general de una EDO lineal homogénea
 - EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
 - Teoremas
 - Métodos para resolver EDOs lineales de orden superior con coeficientes constantes
 - Método de los coeficientes indeterminados
 - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte
- 5 Demostraciones y desarrollos

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Rta: $y_G = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Rta: $y_G = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$

2) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x.$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Rta: $y_G = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$

2) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x.$

Rta: $y_G = c_1 e^x + c_2 e^{4x} - \frac{8}{3}x e^x.$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

1) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$

Rta: $y_G = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$

2) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x.$

Rta: $y_G = c_1 e^x + c_2 e^{4x} - \frac{8}{3}x e^x.$

3) $y'' - y' + y = 2 \operatorname{sen}(3x).$

Rta:

$$y_c = e^{x/2} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right)$$

$$y_p = A \operatorname{sen}(3x) + B \cos(3x)$$

$$y_G = e^{x/2} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) + \frac{6}{73} \cos(3x) - \frac{16}{73} \operatorname{sen}(3x).$$

Tabla

$g(x)$	Forma de y_p
1. 1 (cualquier constante)	A
2. $5x + 7$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
5. $\text{sen } 4x$	$A \cos 4x + B \text{sen } 4x$
6. $\cos 4x$	$A \cos 4x + B \text{sen } 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. $e^{3x} \text{sen } 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \text{sen } 4x$
11. $5x^2 \text{sen } 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Ex^2 + Fx + G) \text{sen } 4x$
12. $xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + E)e^{3x} \text{sen } 4x$

TABLA 17.1 Método de coeficientes indeterminados para ecuaciones seleccionadas de la forma $ay'' + by' + cy = G(x)$.

Si $G(x)$ tiene un término que es un múltiplo constante de . . .

Y si

Entonces incluya esta expresión en la función de prueba para y_p .

e^{rx}	r no es una raíz de la ecuación característica	Ae^{rx}
	r es una raíz simple de la ecuación característica	Axe^{rx}
	r es una raíz doble de la ecuación característica	Ax^2e^{rx}
$\text{sen } kx, \text{ cos } kx$	ki no es una raíz de la ecuación característica	$B \cos kx + C \text{ sen } kx$
$px^2 + qx + m$	0 no es una raíz de la ecuación característica	$Dx^2 + Ex + F$
	0 es una raíz simple de la ecuación característica	$Dx^3 + Ex^2 + Fx$
	0 es una doble raíz de la ecuación característica	$Dx^4 + Ex^3 + Fx^2$

Método de variación de parámetros

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$

Método de variación de parámetros

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases} \quad \text{Resolver por determinantes.}$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = \csc(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = \csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \sen(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = \csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = \csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12};$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = \csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \sin(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12}; \quad u_2' = \frac{\operatorname{ctg}(3x)}{12}$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = \csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$u_1' = -\frac{1}{12}; \quad u_2' = \frac{\operatorname{ctg}(3x)}{12}$$

$$y = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{12}x \cos(3x) + \frac{\ln |\operatorname{sen}(3x)|}{36} \operatorname{sen}(3x)$$

$$I = \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \text{ o subintervalos de éste.}$$

- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
 - PVI y PVF
 - Dependencia e independencia lineal de soluciones
 - Teorema de solución general de una EDO lineal homogénea
 - EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
 - Teoremas
 - Métodos para resolver EDOs lineales de orden superior con coeficientes constantes
 - Método de los coeficientes indeterminados
 - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte
- 5 Demostraciones y desarrollos

Ecuación del movimiento libre no amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t) \quad \text{con } b = 0, \text{ y } f(t) = 0, \forall t$$

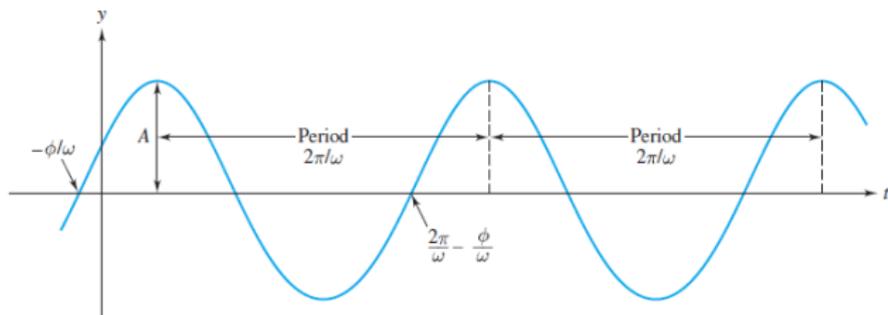
Ecuación del movimiento libre no amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t) \quad \text{con } b = 0, \text{ y } f(t) = 0, \forall t$$

$$my'' + ky = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) \quad \rightarrow \quad y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \tan \phi = \frac{c_1}{c_2}; \quad \text{Frecuencia natural: } \frac{\omega}{2\pi}$$



Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

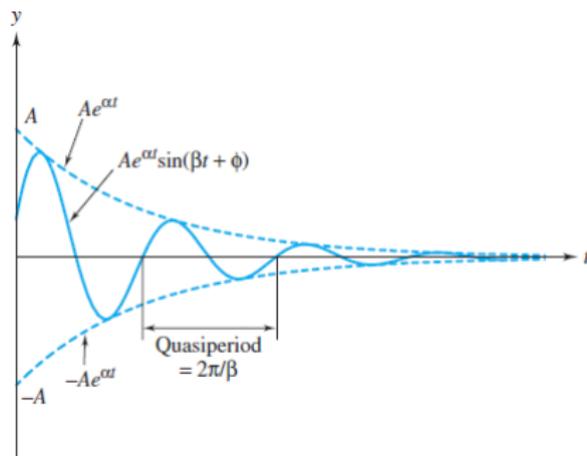
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, b > 0$$

Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \quad b > 0$$

Movimiento **subamortiguado**: $b^2 < 4mk$ $\alpha = -\frac{b}{2m} < 0$

$$y = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)) \quad \rightarrow \quad y = e^{\alpha t} A \sin(\beta t + \phi)$$



Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

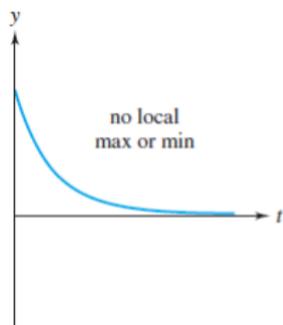
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, b > 0$$

Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

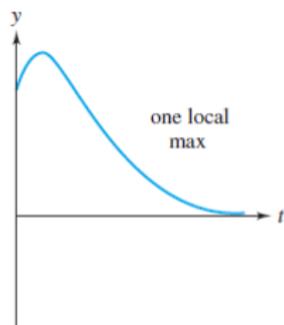
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \quad b > 0$$

Movimiento **sobreamortiguado**: $b^2 > 4mk$

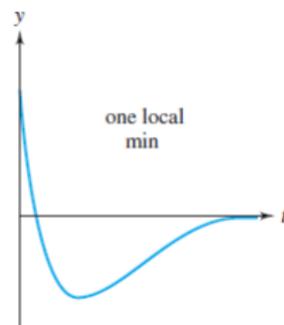
$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad r_1 < 0; r_2 < 0.$$



(a)



(b)



(c)

Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, b > 0$$

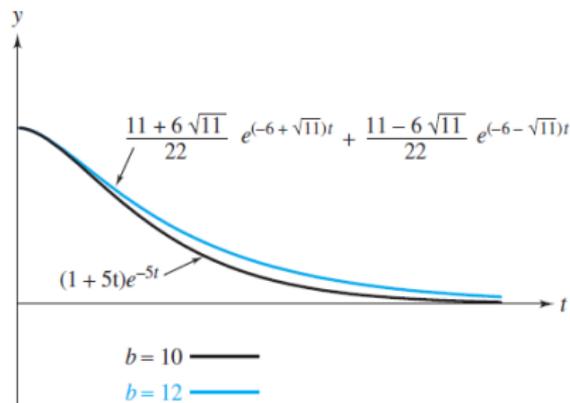
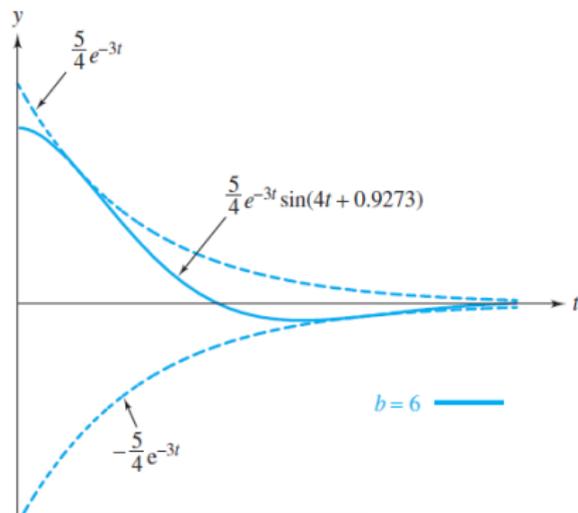
Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \quad b > 0$$

Movimiento **críticamente amortiguado**: $b^2 = 4mk$

$$y = c_1 e^{-\frac{b}{2m}t} + c_2 t e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Ejemplo: $y'' + by' + 25y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; $b = 6, 10, 12$.



Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t), \quad 0 < b^2 < 4mk;$$

Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t), \quad 0 < b^2 < 4mk; \quad f(t) = F_0 \cos(\gamma t)$$

Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t), \quad 0 < b^2 < 4mk; \quad f(t) = F_0 \cos(\gamma t)$$

$$y = \underbrace{Ae^{-\frac{b}{2m}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk-b^2}}{2m}t + \phi\right)}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}} \operatorname{sen}(\gamma t + \theta)}_{\text{Estable}}$$

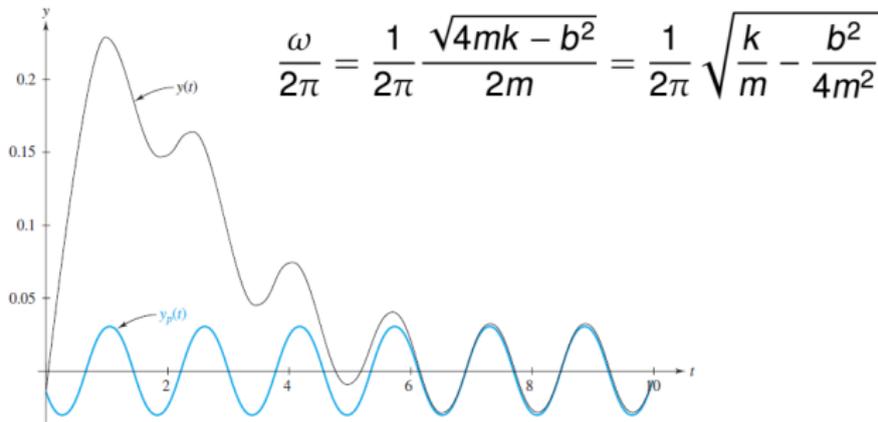


Figure 4.32 Convergence of $y(t)$ to the steady-state solution $y_p(t)$ when $m = 4$, $b = 6$, $k = 3$, $F_0 = 2$, $\gamma = 4$

Movimiento forzado no amortiguado - Resonancia pura

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = F_0 \sin(\gamma t), \quad (b = 0).$$

Movimiento forzado no amortiguado - Resonancia pura

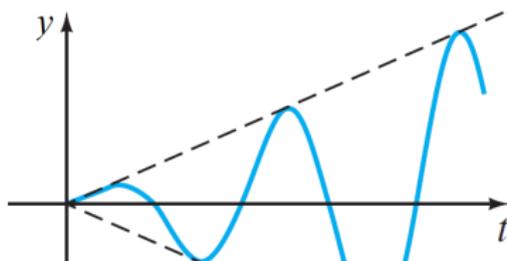
$$y''(t) + \omega^2 y(t) = F_0 \sin(\gamma t), \quad (b = 0).$$

$$y_G(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \sin(\gamma t), \quad \text{si } \gamma \neq \omega.$$

$$y_G(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\sin(\omega t) + \tan^{-1} \left(\frac{c_1}{c_2} \right) \right) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \sin(\gamma t).$$

No hay estado transitorio. Tomamos las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ y calculamos el límite

$$\lim_{\gamma \rightarrow \omega} y(t) = \frac{F_0}{2\omega} \left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - t \cos(\omega t) \right).$$



- 1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- 2 Ecuaciones lineales homogéneas
 - PVI y PVF
 - Dependencia e independencia lineal de soluciones
 - Teorema de solución general de una EDO lineal homogénea
 - EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
- 3 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
 - Teoremas
 - Métodos para resolver EDOs lineales de orden superior con coeficientes constantes
 - Método de los coeficientes indeterminados
 - Método de variación de parámetros
- 4 Sistemas masa resorte
- 5 Demostraciones y desarrollos

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Teorema

Dada una ED lineal $a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x)$ donde las funciones coeficientes a_k , $0 \leq k \leq n$, y G son continuas en algún intervalo abierto I y $a_n(x) \neq 0$ en I . Entonces la solución general de la ED tiene la forma $y = y_c + y_p$ donde y_c es la **función complementaria** y y_p es **cualquier** solución particular de la ecuación no homogénea.

Demostrar.

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Dada

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x), \quad (2)$$

sea Φ una solución arbitraria de (2) en I , sea y_p una solución particular de (2) en I y sean y_1 y y_2 dos soluciones LI en I de la ED homogénea asociada a (2), es decir que $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución complementaria de (2).

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Dada

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x), \quad (2)$$

sea Φ una solución arbitraria de (2) en I , sea y_p una solución particular de (2) en I y sean y_1 y y_2 dos soluciones LI en I de la ED homogénea asociada a (2), es decir que $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución complementaria de (2).

Llamemos Y a la función dada por $Y(x) = \Phi(x) - y_p(x)$, definida en I y probemos que Y es solución de la ED homogénea asociada a (2):

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Dada

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x), \quad (2)$$

sea Φ una solución arbitraria de (2) en I , sea y_p una solución particular de (2) en I y sean y_1 y y_2 dos soluciones LI en I de la ED homogénea asociada a (2), es decir que $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución complementaria de (2).

Llamemos Y a la función dada por $Y(x) = \Phi(x) - y_p(x)$, definida en I y probemos que Y es solución de la ED homogénea asociada a (2):

$$\begin{aligned} a_2(x)Y''(x) + a_1(x)Y'(x) + a_0(x)Y(x) &= \\ &= a_2(x)(\Phi''(x) - y_p''(x)) + a_1(x)(\Phi'(x) - y_p'(x)) + a_0(x)(\Phi(x) - y_p(x)) \\ &= (a_2(x)\Phi''(x) + a_1(x)\Phi'(x) + a_0(x)\Phi(x)) \\ &\quad - (a_2(x)y_p''(x) + a_1(x)y_p'(x) + a_0(x)y_p(x)) \\ &= G(x) - G(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Luego Y es solución de

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

así que, por T.S.G.H., existen \bar{c}_1 y \bar{c}_2 tales que

$$Y(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x), \quad \forall x \in I.$$

Teorema de solución general de ED lineal no homogénea

Luego Y es solución de

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

así que, por T.S.G.H., existen \bar{c}_1 y \bar{c}_2 tales que

$$Y(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x), \quad \forall x \in I.$$

Entonces $\Phi(x) - y_p(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x)$, o sea

$$\Phi(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + y_p(x). \quad \blacksquare$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$y'_p = u'_1y_1 + u_1y'_1 + u'_2y_2 + u_2y'_2$$

$$y''_p = u''_1y_1 + u'_1y'_1 + u_1y''_1 + u'_1y''_1 + u''_2y_2 + u'_2y'_2 + u_2y''_2 + u'_2y''_2$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$y'_p = u'_1y_1 + u_1y'_1 + u'_2y_2 + u_2y'_2$$

$$y''_p = u''_1y_1 + u'_1y'_1 + u'_1y'_1 + u_1y''_1 + u''_2y_2 + u'_2y'_2 + u'_2y'_2 + u_2y''_2$$

$$ay''_p + by'_p + cy_p = u_1(ay''_1 + by'_1 + cy_1) + u_2(ay''_2 + by'_2 + cy_2)$$

$$+ a(u''_1y_1 + u'_1y'_1) + a(u''_2y_2 + u'_2y'_2) + (au'_1y'_1 + bu'_1y_1 + au'_2y'_2 + bu'_2y_2)$$

$$= a \frac{d}{dx}(u'_1y_1 + u'_2y_2) + b(u'_1y_1 + u'_2y_2) + a(u'_1y'_1 + u'_2y'_2) = G$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$y'_p = u'_1y_1 + u_1y'_1 + u'_2y_2 + u_2y'_2$$

$$y''_p = u''_1y_1 + u'_1y'_1 + u'_1y'_1 + u_1y''_1 + u''_2y_2 + u'_2y'_2 + u'_2y'_2 + u_2y''_2$$

$$ay''_p + by'_p + cy_p = u_1(ay''_1 + by'_1 + cy_1) + u_2(ay''_2 + by'_2 + cy_2)$$

$$+ a(u''_1y_1 + u'_1y'_1) + a(u''_2y_2 + u'_2y'_2) + (au'_1y'_1 + bu'_1y_1 + au'_2y'_2 + bu'_2y_2)$$

$$= a \frac{d}{dx}(u'_1y_1 + u'_2y_2) + b(u'_1y_1 + u'_2y_2) + a(u'_1y'_1 + u'_2y'_2) = G$$

$$\begin{cases} u'_1y_1 + u'_2y_2 = 0 \\ u'_1y'_1 + u'_2y'_2 = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$y'_p = u'_1y_1 + u_1y'_1 + u'_2y_2 + u_2y'_2$$

$$y''_p = u''_1y_1 + u'_1y'_1 + u'_1y'_1 + u_1y''_1 + u''_2y_2 + u'_2y'_2 + u'_2y'_2 + u_2y''_2$$

$$ay''_p + by'_p + cy_p = u_1(ay''_1 + by'_1 + cy_1) + u_2(ay''_2 + by'_2 + cy_2)$$

$$+ a(u''_1y_1 + u'_1y'_1) + a(u''_2y_2 + u'_2y'_2) + (au'_1y'_1 + bu'_1y_1 + au'_2y'_2 + bu'_2y_2)$$

$$= a \frac{d}{dx}(u'_1y_1 + u'_2y_2) + b(u'_1y_1 + u'_2y_2) + a(u'_1y'_1 + u'_2y'_2) = G$$

$$\begin{cases} u'_1y_1 + u'_2y_2 = 0 \\ u'_1y'_1 + u'_2y'_2 = \frac{G}{a} = f. \end{cases} \quad \text{Resolver por determinantes.}$$