

## Trabajo Práctico 6

### Series de Fourier. Ecuaciones diferenciales parciales.

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro “Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera” de Zill y Wright, octava edición, Cengage Learning.

Los ejercicios (o secciones) pueden ser obligatorios (o), recomendados no obligatorios (r) y opcionales (\*).

$$\text{Producto escalar o interior} \quad \langle f, g \rangle = \int_I f(x)g(x)dx$$

Desarrollo en serie de Fourier de una función  $f$  definida en el intervalo  $(-p, p)$ .

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right)$$
$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx, \quad b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Desarrollo en serie de Fourier de una función  $f$  definida en el intervalo  $(0, L)$ ,  $L = 2p$ .

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right)$$
$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Desarrollo en serie de cosenos de Fourier de una función  $f$  definida en el intervalo  $(0, p)$ .

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$
$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Desarrollo en serie de senos de Fourier de una función  $f$  definida en el intervalo  $(0, p)$ .

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$
$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

### Funciones Ortogonales

1. (r) Demuestre que las siguientes funciones son ortogonales en el intervalo indicado.

a)  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = x^2$ ,  $(-2, 2)$

b)  $f_1(x) = e^x$ ,  $f_2(x) = xe^{-x} - e^{-x}$ ,  $(0, 2)$

2. En los siguientes problemas demuestre que los conjuntos son ortogonales en el intervalo indicado.

- a) (o)  $\{\text{sen}(nx), n = 1, 2, 3, 4\dots\}, [0, \pi]$
- b) (r)  $\{1, \cos(nx), n = 1, 2, 3, 4\dots\}, [0, \pi]$
- c) (r)  $\{\text{sen}(\frac{n\pi}{p}x), n = 1, 2, 3, 4\dots\}, [0, p]$
- d) (r)  $\{\text{sen}(nx), n = 1, 2, 3, 4\dots\}, [0, \frac{\pi}{2}]$
- e) (r)  $\{1, \cos(\frac{n\pi}{p}x), \text{sen}(\frac{n\pi}{p}x), n = 1, 2, 3, 4\dots\}, [-p, p]$

3. Determine si los siguientes conjuntos de funciones ortogonales son completos en cada intervalo dado:

- a) (o)  $\{\text{sen}(nx), n = 1, 2, 3, 4\dots\}, [-\pi, \pi]$
- b) (r)  $\{1, \cos(nx), n = 1, 2, 3, 4\dots\}, [-\pi, \pi]$

## Series de Fourier

4. Encuentre la serie de Fourier de  $f$  en el intervalo dado:

- a) (r)  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 < x < 0, \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$
- b) (r)  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$
- c) (r)  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$
- d) (o)  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -2 < x < 0, \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } 1 \leq x < 2. \end{cases}$
- e) (r)  $f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi.$
- f) (r)  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ \text{sen } x, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$
- g) (o)  $f(x) = \text{sen}(x), \quad -\pi < x < \pi.$
- h) (o)  $f(x) = 5 \text{sen}(3x), \quad -\pi < x < \pi.$
- i) (o)  $f(x) = \text{sen}(x) + 5 \text{sen}(3x), \quad -\pi < x < \pi.$

5. (r) Utilizando la serie del ejercicio 4c, demuestre que:

- a)  $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$
- b)  $\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$

6. (\*)

a) Utilice las formas exponenciales complejas del seno y del coseno,

$$\cos \frac{n\pi x}{p} = \frac{e^{in\pi x/p} + e^{-in\pi x/p}}{2}, \quad \text{sen} \frac{n\pi x}{p} = \frac{e^{in\pi x/p} - e^{-in\pi x/p}}{2i},$$

para demostrar que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{p} \right)$$

se puede expresar en la forma compleja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p},$$

donde

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

b) Demuestre que  $c_0$ ,  $c_n$  y  $c_{-n}$  del inciso anterior se pueden escribir como

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) e^{-in\pi x/p} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

7. (r) Utilice los resultados del problema 6 para encontrar la forma compleja de la serie de Fourier de  $f(x) = e^x$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

## Series de Fourier de cosenos y de senos

8. (r) Determine si la función dada es par, impar o ninguna:

a)  $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

b)  $f(x) = \text{sen}(3x)$

c)  $f(x) = x^2 + x$

d)  $f(x) = e^{|x|}$

e)  $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

9. (r) Pruebe las siguientes propiedades de funciones pares o impares (suponga  $f$  definida en un intervalo simétrico  $[-a, a]$ ).

a) El producto de dos funciones pares es par.

b) El producto de dos funciones impares es par.

c) El producto de una función impar y una función par es impar.

d) Si  $f$  es par, entonces  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

e) Si  $f$  es impar, entonces  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

10. Sin calcular ningún coeficiente, en los siguientes ejercicios grafique en el intervalo  $[-3\pi, 3\pi]$  las series de Fourier, de senos y de cosenos generadas por las funciones dadas. En caso de presentarse una discontinuidad, marque claramente el valor de la serie en ese punto.

a) (r)  $f(x) = \text{sen}(x), \quad 0 < x < \pi$ .

b) (o)  $f(x) = \text{sen}(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

c) (r)  $f(x) = \text{cos}(x), \quad 0 < x < \pi$ .

d) (r)  $f(x) = \text{cos}(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

e) (r)  $f(x) = e^x, \quad 0 < x < 1$ .

11. Desarrolle cada una de las funciones dadas en una serie adecuada de cosenos o senos:

$$\begin{aligned}
 a) \text{ (o) } f(x) &= \begin{cases} x - 1, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ x + 1, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases} \\
 b) \text{ (r) } f(x) &= \begin{cases} -1, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases} \\
 c) \text{ (r) } f(x) &= \begin{cases} x + 1, & \text{si } -1 < x < 0, \\ 1 - x, & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases} \\
 d) \text{ (r) } f(x) &= \begin{cases} -\pi, & \text{si } -2\pi < x < -\pi, \\ x, & \text{si } -\pi \leq x < \pi, \\ \pi, & \text{si } \pi \leq x < 2/\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

12. Desarrolle la función dada en tres series: una de Fourier, una de cosenos y otra de senos, en el semiintervalo dado:

$$\begin{aligned}
 a) \text{ (o) } f(x) &= \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases} \\
 b) \text{ (r) } f(x) &= \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{si } 1 \leq x < 2. \end{cases} \\
 c) \text{ (r) } f(x) &= \text{sen}(x), \quad 0 < x < \pi. \\
 d) \text{ (r) } f(x) &= x^2, \quad (0, 2\pi). \\
 e) \text{ (r) } f(x) &= x + 1, \quad (0, 1).
 \end{aligned}$$

13. (r) Sea  $F$  la serie de senos de Fourier generada por  $f(x) = x + 1$ , con  $0 < x < p$ .

- Represente gráficamente la función  $F$  en  $[-2p, 2p]$ .
- Indique cuánto valen  $F(-p)$  y  $F(\frac{3}{2}p)$ .
- Dé fórmulas para calcular los coeficientes de Fourier correspondientes a la serie de senos de Fourier de  $f$ .

14. (o) Dada la función  $f$  por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 1; \\ x^2, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

- Plantee fórmulas para los coeficientes correspondientes a una serie de Fourier generada por  $f$ .
- Si  $F$  es una serie de senos de Fourier generada por  $f$ , indique cuánto valen:

$$F(2), \quad F(-1), \quad F\left(\frac{5}{2}\right).$$

### (\*) Ejercicios tomados en exámenes

15. Considere la función  $f$  dada por  $f(x) = x$ ,  $0 < x < \pi$ .

- Extienda  $f$  al intervalo  $-\pi < x < \pi$  de modo que  $f$  sea impar en dicho intervalo. Grafique.
- Halle la serie trigonométrica de Fourier para dicha función.
- Indique condiciones de convergencia para una serie de Fourier y analice si esta función las cumple o no.

16. Indique si la familia ortogonal de funciones  $\left\{ \cos \frac{n\pi x}{p}, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$  es o no completa en  $[0, 2p]$ . Justifique.

17. Sea la función  $f$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{si } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Se sabe que

$$\int_1^2 1 \, dx = 1, \quad \int_1^2 \cos(n\pi x) \, dx = 0, \quad \int_1^2 \operatorname{sen}(n\pi x) \, dx = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi},$$

$$\int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \, dx = -\frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad \int_1^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \, dx = -\frac{2}{n\pi} \left( (-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right).$$

- Escriba la serie de Fourier, la serie de cosenos y la serie de senos generadas por  $f$ . Para justificar su respuesta, plantee las fórmulas para hallar los coeficientes necesarios; no hace falta que calcule las integrales si aparecen en la lista de más arriba.
  - Dé los valores de cada una de estas tres series evaluadas en  $-2$ .
  - Indique, para cada una de las funciones definidas por las series anteriores, si se trata de una función continua en  $x = 4$  o no, justificando su respuesta.
18. Dada la función  $f(x) = e^x$ ,  $0 < x < \pi$ , y conociendo las antiderivadas en (1)-(4) (no necesita calcularlas):
- Expresar la serie de Fourier generada por  $f$ .
  - Indique cuánto valen las series de Fourier, de senos y de cosenos (son tres series) cuando las evalúa en  $x = 2\pi$ .
  - (agregado al TP en 2022) Indique cuánto valen las series de Fourier, de senos y de cosenos (son tres series) cuando las evalúa en  $x = 200\pi$  y en  $x = 111\pi$ .

$$\int e^x \cos(2nx) \, dx = \frac{e^x}{4n^2 + 1} (2n \operatorname{sen}(2nx) + \cos(2nx)) \quad (1)$$

$$\int e^x \operatorname{sen}(2nx) \, dx = \frac{e^x}{4n^2 + 1} (\operatorname{sen}(2nx) - 2n \cos(2nx)) \quad (2)$$

$$\int e^x \cos(nx) \, dx = \frac{e^x}{n^2 + 1} (n \operatorname{sen}(nx) + \cos(nx)) \quad (3)$$

$$\int e^x \operatorname{sen}(nx) \, dx = \frac{e^x}{n^2 + 1} (\operatorname{sen}(nx) - n \cos(nx)) \quad (4)$$

19. Considere la función  $f$  dada por  $f(x) = x^2$ ,  $0 < x < \pi$ .

- Extienda  $f$  al intervalo  $-\pi < x < \pi$  de modo que  $f$  sea impar en dicho intervalo. Grafique.
- Halle la serie trigonométrica de Fourier para dicha función.
- Indique condiciones de convergencia para una serie de Fourier y analice si esta función las cumple o no.

20. Considere la función  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0; \\ \pi - x, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Represente gráficamente a esta función y halle la serie trigonométrica de Fourier para dicha función. Indique condiciones de convergencia para una serie de Fourier y analice si esta función las cumple o no.

21. Considere la función dada por  $f(x) = 10x - x^2$  en el intervalo  $[0, 10]$ .
- Plantee el desarrollo en serie de senos de Fourier de  $f$ . Para ello especifique (sin necesidad de resolver) claramente las integrales necesarias, y luego exprese la serie pedida.
  - Indique, justificando su respuesta, si la serie obtenida es o no convergente al valor de la función  $f$  en  $x \in [0, 10]$ . En caso de no ser convergente en algunos valores  $x$ , debe indicar claramente a qué valor converge la serie obtenida, si es que lo hace.
  - Represente gráficamente en el intervalo  $[-10, 10]$  la función obtenida (serie de Fourier).

22. Considere el problema dado por

$$5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u(0, t) = u(10, t) = 0, t > 0; u(x, 0) = 10x - x^2, 0 \leq x \leq 10,$$

en el que  $u$  representa la temperatura en cada punto de un alambre de longitud 10 (unidades), en cada instante  $t$ . Haga un planteo para encontrar una solución a este problema, justificando su respuesta.

23. Si  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  está dada por  $f(x) = x$ ,

- plantee fórmulas para los coeficientes de la serie de Fourier generada por  $f$ .
- Si  $F$  es la función definida por la serie de Fourier generada por  $f$ , indique cuánto vale  $F(L)$ .

24. Halle la serie de Fourier generada por la función  $f$  definida en  $[0, 2]$ , dada por  $f(x) = 0$  si  $0 \leq x < 1$  y  $f(x) = 1$  si  $1 \leq x \leq 2$ .

25. Supongamos que  $f$  es una función continua en el intervalo  $(0, L)$ ,  $L > 0$ . Consideremos la extensión impar de  $f$  y llamemos  $F$  a la serie trigonométrica de Fourier generada por dicha extensión.

- Para cualquier función  $f$  continua definida en  $(0, L)$ , plantee fórmulas para hallar los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  que corresponden a la serie de Fourier  $F$  buscada.
- Para el caso especial en que  $f$  está dada por

$$f(x) = x^2 - 1, 0 < x < L,$$

indique cuáles son los siguientes valores:  $F(0)$ ,  $F(-L)$  y  $F(\frac{3}{2}L)$ .

- Enuncie el teorema de convergencia de series de Fourier.

26. Sea  $f$  la función definida en  $(0, 2k)$  por  $f(x) = k$ , si  $0 < x < k$  y  $f(x) = 2k - x$ , si  $k \leq x < 2k$ . Sabiendo que:

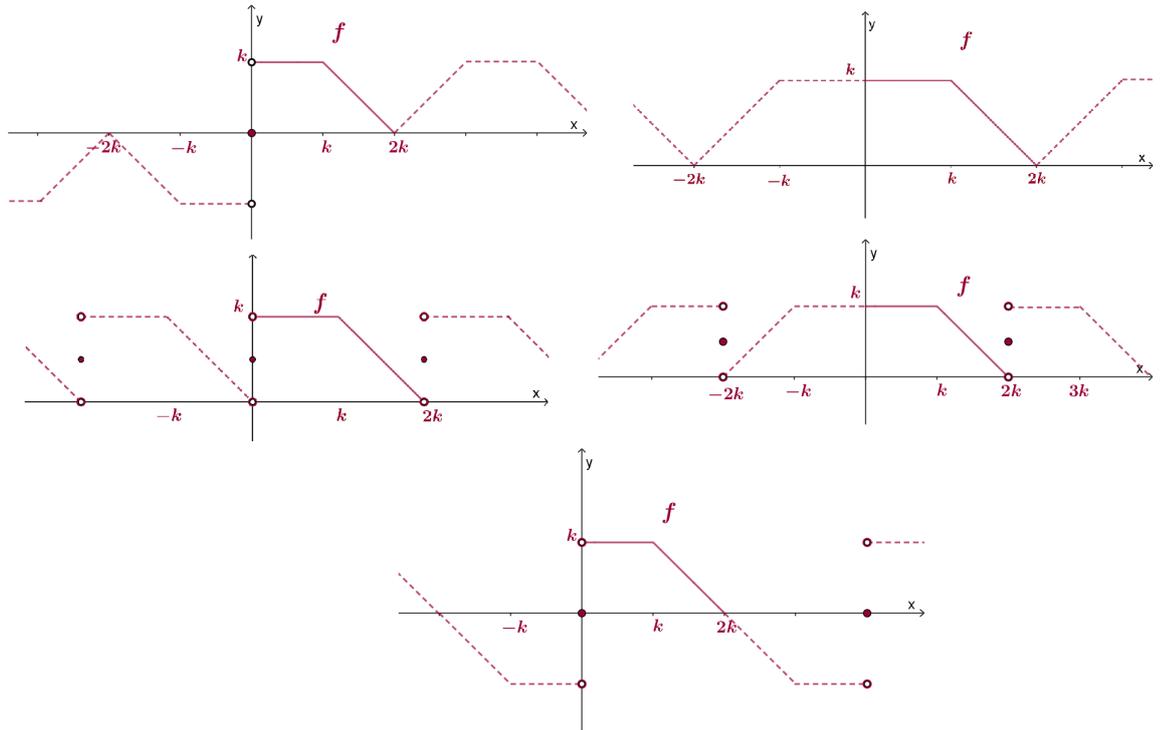
$$(1) \frac{1}{k} \int_0^{2k} f(x) dx = \frac{3k}{2};$$

$$(2) \frac{1}{k} \int_0^{2k} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2k}\right) dx = \frac{4k}{n^2\pi^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right);$$

$$(3) \frac{1}{k} \int_0^{2k} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2k}\right) dx = \frac{4k}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \frac{2k}{n\pi};$$

$$(4) \frac{1}{k} \int_0^{2k} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{k}\right) dx = \frac{k}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1); (5) \frac{1}{k} \int_0^{2k} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{k}\right) dx = \frac{k}{n\pi}$$

- a) (10 puntos) Exprese la serie de cosenos de Fourier generada por  $f$  y, si usa fórmulas de las anteriores, indique claramente cuál o cuáles usa.
- b) (10 puntos) Exprese la serie de senos de Fourier generada por  $f$  y, si usa fórmulas de las anteriores, indique claramente cuál o cuáles usa.
- c) (10 puntos) Exprese la serie de Fourier generada por  $f$  y, si usa fórmulas de las anteriores, indique claramente cuál o cuáles usa.
- d) (15 puntos) Indique si alguno de los siguientes gráficos corresponde a la serie de cosenos de Fourier generada por  $f$ , si alguno corresponde a la serie de senos de Fourier generada por  $f$  y si alguno corresponde a la serie de Fourier generada por  $f$ . Justifique.



27. Sea  $f(x) = x$ ,  $0 < x < L$ , para cierto  $L > 0$ . Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si es verdadera o falsa. **No es necesario que justifique** sus respuestas en este ejercicio.

- a)  La serie de cosenos de Fourier generada por  $f$  coincide con la serie de Fourier generada por la función  $g$  definida en  $(-L, L)$  por  $g(x) = |x|$ .
- b)  El coeficiente  $a_0$  correspondiente a la serie de Fourier generada por la extensión impar de  $f$  se calcula mediante la fórmula:  $a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$ .
- c)  La serie de Fourier generada por  $f$  es una función periódica de periodo  $L$ , definida en  $\mathbb{R}$ .
- d)  La serie de Fourier generada por  $f$ , digamos  $F$ , verifica:  $F(0) = F(2L)$  y  $F(\frac{L}{2}) = f(\frac{L}{2})$ .

28. Indique en cada caso si la afirmación dada es verdadera (V) o falsa (F), **justificando** su respuesta.

- a)  Sea  $F$  la serie de cosenos de Fourier asociada a  $f(x) = x + 1$  con  $0 < x < p$ , entonces  $F(x) \neq |x + 1|$  en algún punto de  $(-p, p)$ .

- b)  Sea  $F$  la serie trigonométrica de Fourier asociada a  $f(x) = x^3$  en  $(-p, p)$ . Entonces  $F(x) = f(x)$  para todo  $x$  en  $(-p, p)$ .
- c)  Si  $f$  es una función definida en  $[0, L]$ , los coeficientes de la serie de senos de Fourier generada por  $f$  son  $a_0, a_n$  y  $b_n, n = 1, 2, \dots$ , donde  $a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx = 0$ .
- d)  Sea  $F$  la serie trigonométrica de Fourier asociada a  $f(x) = x^3$  en  $(-p, p)$ . Entonces  $F(3p) = p^3$ .
- e)  Dada la función  $f$  definida en  $(0, L)$  por  $f(x) = 0$  si  $0 < x < \frac{L}{2}$  y  $f(x) = 1$  si  $\frac{L}{2} \leq x < L$ , la serie de cosenos Fourier generada por  $f$  evaluada en  $L$  vale  $\frac{1}{2}$ .