Trabajo Práctico 6

Series de Fourier. Ecuaciones diferenciales parciales.

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro “Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera”de Zill y Wright, octava edición, Cengage Learning.
Los ejercicios (o secciones) pueden ser obligatorios (o), recomendados no obligatorios (r) y opcionales (*).

Producto escalar o interior $\qquad \langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)dx$

Desarrollo en serie de Fourier de una función f definida en el intervalo $(-p,\, p)$.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\frac{n\pi x}{p}) + b_n\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{p})\right)$$
$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx,\; a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{p})dx,\; b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{p})dx,\; n = 1, 2, ...$$

Desarrollo en serie de Fourier de una función f definida en el intervalo $(0,\, L)$, $L = 2p$.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\frac{2n\pi x}{L}) + b_n\,\mathrm{sen}(\frac{2n\pi x}{L})\right)$$
$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx,\; a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos(\frac{2n\pi x}{L})dx,\; b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}(\frac{2n\pi x}{L})dx,\; n = 1, 2, ...$$

Desarrollo en serie de cosenos de Fourier de una función f definida en el intervalo $(0,\, p)$.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi x}{p})$$
$$a_0 = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)dx,\; a_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{p})dx,\; n = 1, 2, ...$$

Desarrollo en serie de senos de Fourier de una función f definida en el intervalo $(0,\, p)$.

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(\frac{n\pi x}{p})$$
$$b_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{p})dx,\; n = 1, 2, ...$$

Funciones Ortogonales

1. (r) Demuestre que las siguientes funciones son ortogonales en el intervalo indicado.
   a) $f_1(x) = x,\; f_2(x) = x^2,\; (-2, 2)$
   b) $f_1(x) = e^x,\; f_2(x) = xe^{-x} - e^{-x},\; (0, 2)$
2. En los siguientes problemas demuestre que los conjuntos son ortogonales en el intervalo indicado.

a) (o) $\{\operatorname{sen}(nx),\ n = 1, 2, 3, 4...\},\ [0, \pi]$

b) (r) $\{1, \cos(nx),\ n = 1, 2, 3, 4...\},\ [0, \pi]$

c) (r) $\{\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{p}x),\ n = 1, 2, 3, 4...\},\ [0, p]$

d) (r) $\{\operatorname{sen}(nx),\ n = 1, 2, 3, 4...\},\ [0, \pi]$

e) (r) $\{1, \cos(\frac{n\pi}{p}x), \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{p}x),\ n = 1, 2, 3, 4...\},\ [-p, p]$

3. Determine si los siguientes conjuntos de funciones ortogonales son completos en cada intervalo dado:

   a) (o) $\{\operatorname{sen}(nx),\ n = 1, 2, 3, 4...\},\ [-\pi, \pi]$

   b) (r) $\{1, \cos(nx),\ n = 1, 2, 3, 4...\},\ [-\pi, \pi]$

Series de Fourier

4. Encuentre la serie de Fourier de f en el intervalo dado:

   a) (r) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad -1 < x < 0, \\ x, & \text{si} \quad 0 \leq x < 1. \end{cases}$

   b) (r) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

   c) (r) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -\pi < x < 0, \\ x^2, & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

   d) (o) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -2 < x < 0, \\ x, & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si} \quad 1 \leq x < 2. \end{cases}$

   e) (r) $f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi.$

   f) (r) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -\pi < x < 0, \\ \operatorname{sen} x, & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

   g) (o) $f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad -\pi < x < \pi.$

   h) (o) $f(x) = 5\operatorname{sen}(3x), \quad -\pi < x < \pi.$

   i) (o) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + 5\operatorname{sen}(3x), \quad -\pi < x < \pi.$

5. (r) Ulilizando la serie del ejercicio $4c$, demuestre que:

   a) $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...$

   b) $\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ...$

6. (*)

   a) Utilice las formas exponenciales complejas del seno y del coseno,

$$\cos\frac{n\pi x}{p} = \frac{e^{in\pi x/p} + e^{-in\pi x/p}}{2}, \qquad \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p} = \frac{e^{in\pi x/p} - e^{-in\pi x/p}}{2i},$$

   para demostrar que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\right)$$

se puede expresar en la forma compleja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p},$$

donde

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots .$$

b) Demuestre que c_0, c_n y c_{-n} del inciso anterior se pueden escribir como

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} f(x) e^{-in\pi x/p} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

7. (r) Utilice los resultados del problema 6 para encontrar la forma compleja de la serie de Fourier de $f(x) = e^x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Series de Fourier de cosenos y de senos

8. (r) Determine si la función dada es par, impar o ninguna:

   a) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \quad -\pi < x < 0 \\ x + 1 & si \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$

   b) $f(x) = \text{sen}(3x)$

   c) $f(x) = x^2 + x$

   d) $f(x) = e^{|x|}$

   e) $f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & si \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$

9. (r) Pruebe las siguientes propiedades de funciones pares o impares (suponga f definida en un intervalo simétrico $[-a, a]$).

   a) El producto de dos funciones pares es par.

   b) El producto de dos funciones impares es par.

   c) El producto de una función impar y una función par es impar.

   d) Si f es par, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \int_{0}^{a} f(x)dx$.

   e) Si f es impar, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

10. Sin calcular ningún coeficiente, en los siguientes ejercicios grafique en el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$ las series de Fourier, de senos y de cosenos generadas por las funciones dadas. En caso de presentarse una discontinuidad, marque claramente el valor de la serie en ese punto.

    a) (r) $f(x) = \text{sen}(x), \quad 0 < x < \pi$.

    b) (o) $f(x) = \text{sen}(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

    c) (r) $f(x) = \cos(x), \quad 0 < x < \pi$.

    d) (r) $f(x) = \cos(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

    e) (r) $f(x) = e^x, \quad 0 < x < 1$.

11. Desarrolle cada una de las funciones dadas en una serie adecuada de cosenos o senos:

a) (o) $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si} \quad -\pi < x < 0, \\ x+1, & \text{si} \quad 0 \le x < \pi. \end{cases}$

b) (r) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{si} \quad 0 \le x < \pi. \end{cases}$

c) (r) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si} \quad -1 < x < 0, \\ 1-x, & \text{si} \quad 0 \le x < 1. \end{cases}$

d) (r) $f(x) = \begin{cases} -\pi, & \text{si} \quad -2\pi < x < -\pi, \\ x, & \text{si} \quad -\pi \le x < \pi, \\ \pi, & \text{si} \quad \pi \le x < 2\pi. \end{cases}$

12. Desarrolle la función dada en tres series: una de Fourier, una de cosenos y otra de senos, en el semiintervalo dado:

a) (o) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si} \quad \frac{1}{2} \le x < 1. \end{cases}$

b) (r) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ 1, & \text{si} \quad 1 \le x < 2. \end{cases}$

c) (r) $f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad 0 < x < \pi.$

d) (r) $f(x) = x^2$, $(0, 2\pi)$.

e) (r) $f(x) = x + 1$, $(0, 1)$.

13. (r) Sea F la serie de senos de Fourier generada por $f(x) = x + 1$, con $0 < x < p$.

a) Represente gráficamente la función F en $[-2p, 2p]$.

b) Indique cuánto valen $F(-p)$ y $F(\frac{3}{2}p)$.

c) Dé fórmulas para calcular los coeficientes de Fourier correspondientes a la serie de senos de Fourier de f.

14. (o) Dada la función f por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}; & 0 < x < 1; \\ x^2, & 1 \le x < 2. \end{cases}$$

a) Plantee fórmulas para los coeficientes correspondientes a una serie de Fourier generada por f.

b) Si F es una serie de senos de Fourier generada por f, indique cuánto valen:

$$F(2), \qquad F(-1), \qquad F\left(\frac{5}{2}\right).$$

(*) Ejercicios tomados en exámenes

15. Considere la función f dada por $f(x) = x$, $0 < x < \pi$.

a) Extienda f al intervalo $-\pi < x < \pi$ de modo que f sea impar en dicho intervalo. Grafique.

b) Halle la serie trigonométrica de Fourier para dicha función.

c) Indique condiciones de convergencia para una serie de Fourier y analice si esta función las cumple o no.

16. Indique si la familia ortogonal de funciones $\left\{\cos \frac{n\pi x}{p}, n = 1, 2, 3...\right\}$ es o no completa en $[0, 2p]$. Justifique.

17. Sea la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{si } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Se sabe que

$$\int_1^2 1\, dx = 1, \qquad \int_1^2 \cos(n\pi x) dx = 0, \qquad \int_1^2 \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi},$$

$$\int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = -\frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right), \qquad \int_1^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = -\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$$

a) Escriba la serie de Fourier, la serie de cosenos y la serie de senos generadas por f. Para justificar su respuesta, plantee las fórmulas para hallar los coeficientes necesarios; no hace falta que calcule las integrales si aparecen en la lista de más arriba.

b) Dé los valores de cada una de estas tres series evaluadas en -2.

c) Indique, para cada una de las funciones definidas por las series anteriores, si se trata de una función continua en $x = 4$ o no, justificando su respuesta.

18. Dada la función $f(x) = e^x$, $0 < x < \pi$, y conociendo las antiderivadas en (1)-(4) (no necesita calcularlas):

a) Exprese la serie de Fourier generada por f.

b) Indique cuánto valen las series de Fourier, de senos y de cosenos (son tres series) cuando las evalúa en $x = 2\pi$.

c) (agregado al TP en 2022) Indique cuánto valen las series de Fourier, de senos y de cosenos (son tres series) cuando las evalúa en $x = 200\pi$ y en $x = 111\pi$.

$$\int e^x \cos(2nx)\, dx = \frac{e^x}{4n^2+1}(2n \operatorname{sen}(2nx) + \cos(2nx)) \tag{1}$$

$$\int e^x \operatorname{sen}(2nx)\, dx = \frac{e^x}{4n^2+1}(\operatorname{sen}(2nx) - 2n \cos(2nx)) \tag{2}$$

$$\int e^x \cos(nx)\, dx = \frac{e^x}{n^2+1}(n \operatorname{sen}(nx) + \cos(nx)) \tag{3}$$

$$\int e^x \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{e^x}{n^2+1}(\operatorname{sen}(nx) - n \cos(nx)) \tag{4}$$

19. Considere la función f dada por $f(x) = x^2$, $0 < x < \pi$.

a) Extienda f al intervalo $-\pi < x < \pi$ de modo que f sea impar en dicho intervalo. Grafique.

b) Halle la serie trigonométrica de Fourier para dicha función.

c) Indique condiciones de convergencia para una serie de Fourier y analice si esta función las cumple o no.

20. Considere la función $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0; \\ \pi - x, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Represente gráficamente a esta función y halle la serie trigonométrica de Fourier para dicha función. Indique condiciones de convergencia para una serie de Fourier y analice si esta función las cumple o no.

21. Considere la función dada por $f(x) = 10x - x^2$ en el intervalo $[0, 10]$.

    a) Plantee el desarrollo en serie de senos de Fourier de f. Para ello especifique (sin necesidad de resolver) claramente las integrales necesarias, y luego exprese la serie pedida.

    b) Indique, justificando su respuesta, si la serie obtenida es o no convergente al valor de la función f en $x \in [0, 10]$. En caso de no ser convergente en algunos valores x, debe indicar claramente a qué valor converge la serie obtenida, si es que lo hace.

    c) Represente gráficamente en el intervalo $[-\mathbf{10}, \mathbf{10}]$ la función obtenida (serie de Fourier).

22. Considere el problema dado por

$$5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u(0,t) = u(10,t) = 0,\ t > 0;\ u(x,0) = 10x - x^2,\ 0 \leq x \leq 10,$$

en el que u representa la temperatura en cada punto de un alambre de longitud 10 (unidades), en cada instante t. Haga un planteo para encontrar una solución a este problema, justificando su respuesta.

23. Si $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = x$,

    a) plantee fórmulas para los coeficientes de la serie de Fourier generada por f.

    b) Si F es la función definida por la serie de Fourier generada por f, indique cuánto vale $F(L)$.

24. Halle la serie de Fourier generada por la función f definida en $[0, 2]$, dada por $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ y $f(x) = 1$ si $1 \leq x \leq 2$.

25. Supongamos que f es una función continua en el intervalo $(0, L)$, $L > 0$. Consideremos la extensión impar de f y llamemos F a la serie trigonométrica de Fourier generada por dicha extensión.

    a) Para cualquier función f continua definida en $(0, L)$, plantee fórmulas para hallar los coeficientes a_0, a_n y b_n que corresponden a la serie de Fourier F buscada.

    b) Para el caso especial en que f está dada por

$$f(x) = x^2 - 1,\ 0 < x < L,$$

    indique cuáles son los siguientes valores: $F(0)$, $F(-L)$ y $F(\frac{3}{2}L)$.

    c) Enuncie el teorema de convergencia de series de Fourier.

26. Sea f la función definida en $(0, 2k)$ por $f(x) = k$, si $0 < x < k$ y $f(x) = 2k - x$, si $k \leq x < 2k$. Sabiendo que:

$$(1)\ \frac{1}{k}\int_0^{2k} f(x)dx = \frac{3k}{2};$$

$$(2)\ \frac{1}{k}\int_0^{2k} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2k}\right)dx = \frac{4k}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right);$$

$$(3) \frac{1}{k}\int_0^{2k} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2k}\right)dx = \frac{4k}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{2k}{n\pi};$$

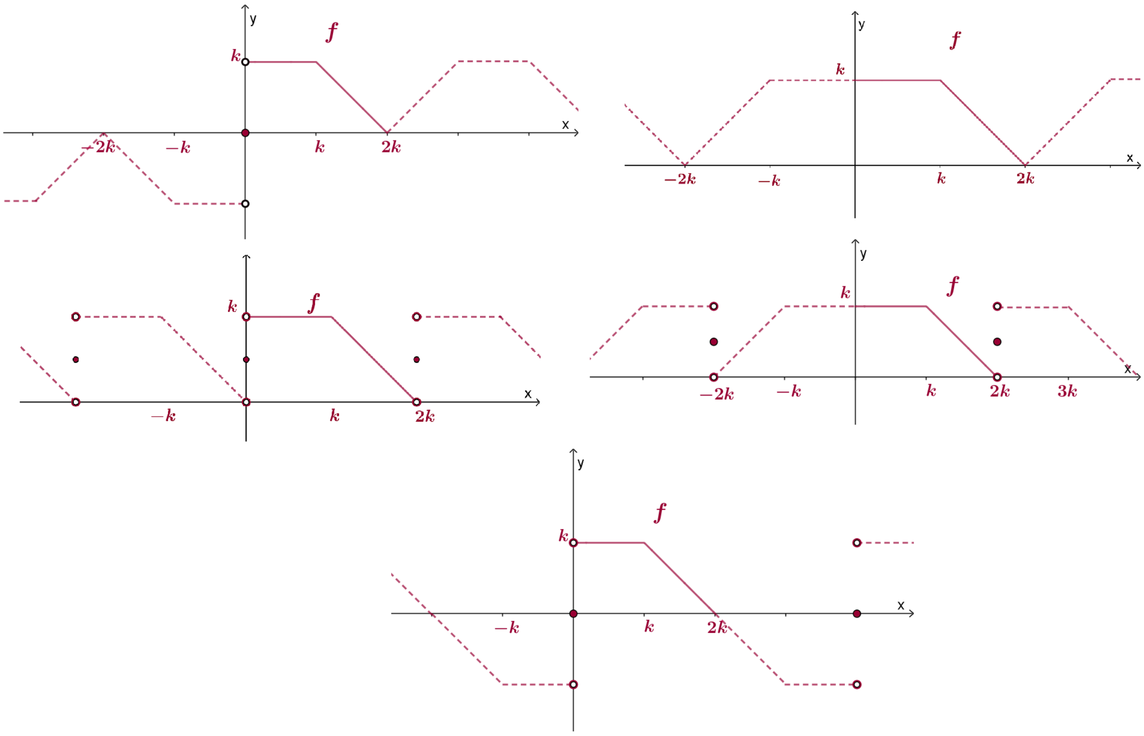
$$(4)\ \frac{1}{k}\int_0^{2k} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{k}\right)dx = \frac{k}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right);\ (5)\ \frac{1}{k}\int_0^{2k} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{k}\right)dx = \frac{k}{n\pi}$$

a) (10 puntos) Exprese la serie de cosenos de Fourier generada por f y, si usa fórmulas de las anteriores, indique claramente cuál o cuáles usa.

b) (10 puntos) Exprese la serie de senos de Fourier generada por f y, si usa fórmulas de las anteriores, indique claramente cuál o cuáles usa.

c) (10 puntos) Exprese la serie de Fourier generada por f y, si usa fórmulas de las anteriores, indique claramente cuál o cuáles usa.

d) (15 puntos) Indique si alguno de los siguientes gráficos corresponde a la serie de cosenos de Fourier generada por f, si alguno corresponde a la serie de senos de Fourier generada por f y si alguno corresponde a la serie de Fourier generada por f. Justifique.



27. Sea $f(x) = x$, $0 < x < L$, para cierto $L > 0$. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si es verdadera o falsa. **No es necesario que justifique** sus respuestas en este ejercicio.

a) $\square$ La serie de cosenos de Fourier generada por f coincide con la serie de Fourier generada por la función g definida en $(-L, L)$ por $g(x) = |x|$.

b) $\square$ El coeficiente a_0 correspondiente a la serie de Fourier generada por la extensión impar de f se calcula mediante la fórmula: $a_0 = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\,dx$.

c) $\square$ La serie de Fourier generada por f es una función periódica de periodo L, definida en $\mathbb{R}$.

d) $\square$ La serie de Fourier generada por f, digamos F, verifica: $F(0) = F(2L)$ y $F(\frac{L}{2}) = f(\frac{L}{2})$.

28. Indique en cada caso si la afirmación dada es verdadera (V) o falsa (F), **justificando** su respuesta.

a) $\square$ Sea F la serie de cosenos de Fourier asociada a $f(x) = x + 1$ con $0 < x < p$, entonces $F(x) \neq |x + 1|$ en algún punto de $(-p, p)$.

b) $\square$ Sea F la serie trigonométrica de Fourier asociada a $f(x) = x^3$ en $(-p, p)$. Entonces $F(x) = f(x)$ para todo x en $(-p, p)$.

c) $\square$ Si f es una función definida en $[0, L]$, los coeficientes de la serie de senos de Fourier generada por f son a_0, a_n y b_n, $n = 1, 2, ...$, donde $a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = 0$.

d) $\square$ Sea F la serie trigonométrica de Fourier asociada a $f(x) = x^3$ en $(-p, p)$. Entonces $F(3p) = p^3$.

e) $\square$ Dada la función f definida en $(0, L)$ por $f(x) = 0$ si $0 < x < \frac{L}{2}$ y $f(x) = 1$ si $\frac{L}{2} \leq x < L$, la serie de cosenos Fourier generada por f evaluada en L vale $\frac{1}{2}$.