Definicion del problema

Clasificación de métodos

Métodos cerrados
- Método de Bisección
- Método de Regula Falsi

Métodos abiertos
- Método de Newton-Raphson
- Método de la Secante
- Método de Punto Fijo

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Práctica de Raíces de Ecuaciones No Lineales

Dr. Claudio Careglio

Cálculo Numéricos y Computación

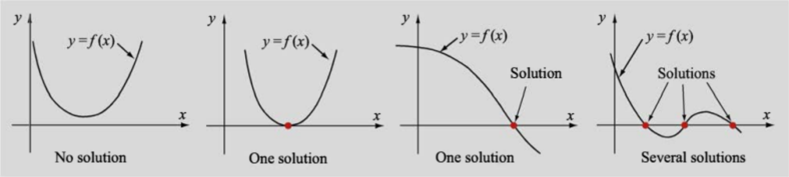
Plan de la presentación I

1. Definicion del problema

2. Clasificación de métodos

3. Métodos cerrados
   - Método de Bisección
   - Método de Regula Falsi

4. Métodos abiertos
   - Método de Newton-Raphson
   - Método de la Secante
   - Método de Punto Fijo


y
y = f(x)
x
No solution
y
y = f(x)
x
One solution
y
y = f(x)
Solution
x
One solution
y
y = f(x)
Solutions
x
Several solutions

Definicion del problema

Clasificación de métodos

Métodos cerrados
Método de Bisección
Método de Regula Falsi

Métodos abiertos
Método de Newton-Raphson
Método de la Secante
Método de Punto Fijo

- Cerrados
  - Bisección
  - Regula Falsi
- Abiertos
  - Newton-Raphson
  - Secante
  - Punto Fijo

Para un intervalo $[a_k, b_k]$
que satisface la condición de inicialización:

$$f(a_k)\, f(b_k) < 0$$

la nueva aproximación
de la raíz puede ser obtenida como:

$$r_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$$

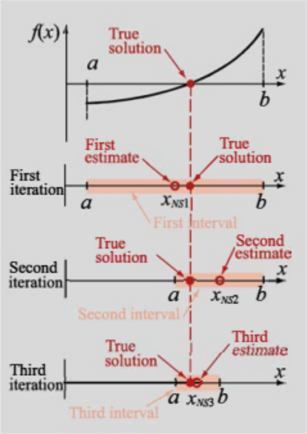
- Control de detención:
Verificar que:

$$f(r_{k+1}) = 0$$

En la práctica:

$$f(r_{k+1}) < \epsilon_1$$
$$|r_{k+1} - r_k| < \epsilon_2$$
$$\left|\frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}}\right| < \epsilon_3$$

- Actualización de variables:



Para:

$$f(a_k)\, f(r_{k+1}) < 0$$

con lo que los extremos del nuevo intervalo se actualizan a:

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k \\ b_{k+1} = r_{k+1} \end{cases}$$

Mientras que si:

$$f(b_k)\, f(r_{k+1}) < 0$$

entonces:

$$\begin{cases} a_{k+1} = r_{k+1} \\ b_{k+1} = b_k \end{cases}$$

Ejemplo:

En el intervalo [0,1] obtener por el método de la Bisección la raíz de la siguiente función:

$$f(x) = x - 2^{-x}$$

Solución:

k	a	b	$f(a)$	$f(b)$	r	$f(r)$	$f(r) < \epsilon_1$	$\lvert r_{k+1} - r_k \rvert < \epsilon_2$	$\lvert \frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}} \rvert < \epsilon_3$
0									
1									
2									
$\vdots$									

Práctica de Raíces de Ecuaciones No Lineales

Dr. Claudio Careglio

Definicion del problema

Clasificación de métodos

Métodos cerrados

Método de Bisección

Método de Regula Falsi

Métodos abiertos

Método de Newton-Raphson

Método de la Secante

Método de Punto Fijo

$$f\left(a_k\right) f\left(r_{k+1}\right) < 0 \qquad \begin{cases} a_{k+1} = a_k \\ b_{k+1} = r_{k+1} \end{cases}$$

$$r_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$$

$$f\left(r_{k+1}\right) < \epsilon_1 \qquad \left|r_{k+1} - r_k\right| < \epsilon_2 \qquad \left|\frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}}\right| < \epsilon_3$$

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	r_{k+1}	$f(r_{k+1})$	$\lvert r_{k+1} - r_k\rvert$	$\left\lvert\frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}}\right\rvert$
0	0	1	$x - 2^{-x} = 0 - 2^{-0} = -1$	$x - 2^{-x} = 1 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = 0.5$	$(a_k + b_k)/2 = (0+1)/2 = 0.5$	$x - 2^{-x} = 0.5 - 2^{-0.5} = -0.21$ (No)	—	—
1	0.5	1	−0.21	0.5	$\frac{0.5+1}{2} = 0.75$	+0.16	$\lvert 0.75 - 0.5\rvert = 0.25$ (No)	$\left\lvert\frac{0.25}{0.75}\right\rvert = 0.33$ (No)
2	0.5	0.75	−0.21	0.16	0.625	−0.02 (No)	$\lvert 0.625 - 0.75\rvert = 0.125$ (No)	$\left\lvert\frac{0.12}{0.625}\right\rvert = 0.2$ (No)
3	0.625	0.75	−0.0234	0.16	0.6875	0.06657 (No)	0.0625 (No)	0.091 (No)
4	0.625	0.6875	−0.0234	0.06657	$\boxed{0.65625}$	0.0217 (No)	0.03125 $\boxed{\text{Si}}$	0.048 (No)

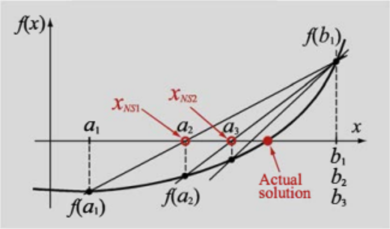
Es decir [illegible] no cumple con criterio de detención

Para
un intervalo $[a_k, b_k]$ que satisface
la condición de inicialización:

$$f\left(a_k\right) f\left(b_k\right) < 0$$

la nueva aproximación
de la raíz puede ser obtenida como:

$$r_{k+1} = a_k - \frac{f\left(a_k\right)}{\frac{f(a_k) - f(b_k)}{a_k - b_k}}$$



- Control de detención:
Verificar que:

$$f\left(r_{k+1}\right) = 0$$

En la práctica:

$$f\left(r_{k+1}\right) < \epsilon_1$$
$$\left|r_{k+1} - r_k\right| < \epsilon_2$$
$$\left|\frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}}\right| < \epsilon_3$$

- Actualización de variables:

Para:

$$f\left(a_k\right) f\left(r_{k+1}\right) < 0$$

con lo que los extremos del nuevo intervalo se actualizan a:

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k \\ b_{k+1} = r_{k+1} \end{cases}$$

Mientras que si:

$$f\left(b_k\right) f\left(r_{k+1}\right) < 0$$

entonces:

$$\begin{cases} a_{k+1} = r_{k+1} \\ b_{k+1} = b_k \end{cases}$$

Ejemplo:

En el intervalo [0,1] obtener por el método de Regula Falsi la raíz de la siguiente función:

$$f(x) = x - 2^{-x}$$

Solución:

k	a	b	$f(a)$	$f(b)$	r	$f(r)$	$f(r) < \epsilon_1$	$\lvert r_{k+1} - r_k \rvert < \epsilon_2$	$\lvert \frac{r_{k+1}-r_k}{r_{k+1}} \rvert < \epsilon_3$
0									
1									
2									
$\vdots$									

Definicion del problema

Clasificación de métodos

Métodos cerrados
Método de Bisección
Método de Regula Falsi

Métodos abiertos
Método de Newton-Raphson
Método de la Secante
Método de Punto Fijo

$$f(a_k)\, f(r_{k+1}) < 0 \qquad \begin{cases} a_{k+1} = a_k \\ b_{k+1} = r_{k+1} \end{cases}$$

$$f(b_k)\, f(r_{k+1}) < 0 \qquad \begin{cases} a_{k+1} = r_{k+1} \\ b_{k+1} = b_k \end{cases}$$

$$r_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{\frac{f(a_k)-f(b_k)}{a_k-b_k}}$$

$$f(r_{k+1}) < \epsilon_1$$

$$|r_{k+1} - r_k| < \epsilon_2$$

$$\left|\frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}}\right| < \epsilon_3$$

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	r_{k+1}	$f(r_{k+1})$	$\lvert r_{k+1} - r_k \rvert$	$\left\lvert \frac{r_{k+1}-r_k}{r_{k+1}} \right\rvert$
0	0	1	$x - 2^{-x} = 0 - 2^{-0} = -1$	$x - 2^{-x} = 1 - 2^{-1} = 0.5$	$\frac{0.5 \cdot 0 - (-1) \cdot 1}{0.5 - (-1)} = 0.\hat{6}$	$x - 2^{-x} = 0.\hat{6} - 2^{-0.\hat{6}} = 0.037$	—	—
1	0	0.66	−1	$x - 2^{-x} = 0.66 - 2^{-0.66} = 0.037$	0.643	0.002	0.024	0.037

Definicion del problema

Clasificación de métodos

Métodos cerrados

Método de Bisección

Método de Regula Falsi

Métodos abiertos

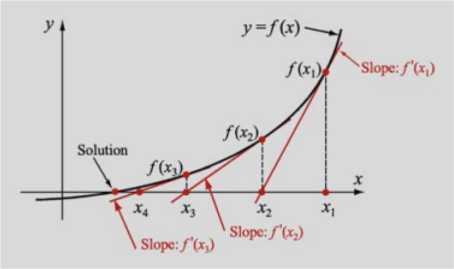
Método de Newton-Raphson

Método de la Secante

Método de Punto Fijo

Se requiere
un valor inicial próximo
a la raíz (aproximación inicial
de la raíz o valor propuesto)
La nueva aproximación de la
raíz puede ser obtenida como:

$$r_{k+1} = r_k - \frac{f\left(r_k\right)}{\frac{df}{dx}\Big|_{r_k}}$$



- Control de detención:

Verificar que:

$$f\left(r_{k+1}\right) = 0$$

En la práctica:

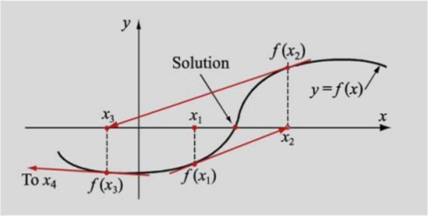
$$f\left(r_{k+1}\right) < \epsilon_1$$

$$\left|r_{k+1} - r_k\right| < \epsilon_2$$

$$\left|\frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}}\right| < \epsilon_3$$

- Actualización de variables:

$$r_k = r_{k+1}$$


y
Solution
f(x2)
y=f(x)
x
x3
x1
x2
To x4
f(x3)
f(x1)

Ejemplo:

Obtener por el método de Newton-Raphson la raíz de la siguiente función considerando el valor inicial $x_0 = 2$:

$$f(x) = 4cos(x) - e^x$$

Solución:

k	r_k	$f(r_k)$	$f'(r_k)$	$f(r_k) < \epsilon_1$	$\lvert r_{k+1} - r_k \rvert < \epsilon_2$	$\left\lvert \frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}} \right\rvert < \epsilon_3$
0						
1						
2						
$\vdots$						

Definicion del problema

Clasificación de métodos

Métodos cerrados

Método de Bisección

Método de Regula Falsi

Métodos abiertos

Método de Newton-Raphson

Método de la Secante

Método de Punto Fijo

Definicion del problema

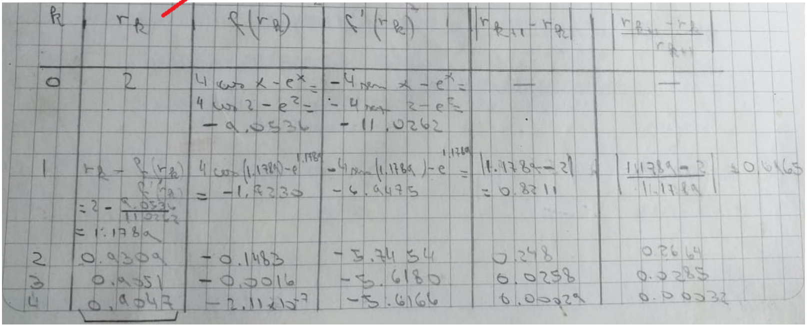
Clasificación de métodos

Métodos cerrados
- Método de Bisección
- Método de Regula Falsi

Métodos abiertos
- Método de Newton-Raphson
- Método de la Secante
- Método de Punto Fijo

$$r_k = r_{k+1} \qquad r_{k+1} = r_k - \frac{f(r_k)}{\frac{df}{dx}\big|_{r_k}} \qquad f(r_{k+1}) < \epsilon_1 \qquad |r_{k+1} - r_k| < \epsilon_2$$

$$\left|\frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}}\right| < \epsilon_3$$

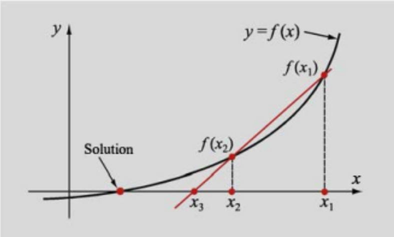


k	r_k	$f(r_k)$	$f'(r_k)$	$\lvert r_{k+1} - r_k \rvert$	$\left\lvert \frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}} \right\rvert$
0	2	$4\cos x - e^x = 4\cos 2 - e^2 = -9.0536$	$-4\,\text{sen}\,x - e^x = -4\,\text{sen}\,2 - e^2 = -11.0262$	—	—
1	$r_k - \frac{f(r_k)}{f'(r_k)} = 2 - \frac{9.0536}{11.0262} = 1.1789$	$4\cos(1.1789) - e^{1.1789} = -1.7230$	$-4\,\text{sen}(1.1789) - e^{1.1789} = -6.9475$	$\lvert 1.1789 - 2 \rvert = 0.8211$	$\left\lvert \frac{1.1789 - 2}{1.1789} \right\rvert \approx 0.6965$
2	0.9309	−0.1483	−5.7454	0.248	0.2664
3	0.9051	−0.0016	−5.6180	0.0258	0.0285
4	0.9047	-2.11×10^{-7}	−5.6166	0.00029	0.00032

Se requiere un dos valores iniciales próximos a la raíz (aproximación inicial de las raíces o valores cercanos propuestos)

La nueva aproximación de la raíz puede ser obtenida como:

$$r_{k+1} = r_k - \frac{f\left(r_k\right)}{\frac{f(r_k)-f\left(r_{k-1}\right)}{r_k - r_{k-1}}}$$



- Control de detención:

Verificar que:

$$f\left(r_{k+1}\right) = 0$$

En la práctica:

$$f\left(r_{k+1}\right) < \epsilon_1$$
$$\left|r_{k+1} - r_k\right| < \epsilon_2$$
$$\left|\frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}}\right| < \epsilon_3$$

- Actualización de variables:

$$r_{k-1} = r_k$$

$$r_k = r_{k+1}$$

Ejemplo:

Obtener por el método de la Secante la raíz de la siguiente función en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$f\left(x\right) = 4cos\left(x\right) - e^{x}$$

Solución:

k	r_{k-1}	r_k	$f\left(r_{k-1}\right)$	$f\left(r_k\right)$	$m_k = \frac{f(r_k)-f\left(r_{k-1}\right)}{r_k-r_{k-1}}$	r_{k+1}	$f\left(r_{k+1}\right)$	$f\left(r_{k+1}\right) < \epsilon_1$	$\left\|r_{k+1} - r_k\right\| < \epsilon_2$	$\left\|\frac{r_{k+1}-r_k}{r_{k+1}}\right\| < \epsilon_3$
0										
1										
2										
$\vdots$										

Definicion del problema

Clasificación de métodos

Métodos cerrados

Método de Bisección

Método de Regula Falsi

Métodos abiertos

Método de Newton-Raphson

Método de la Secante

Método de Punto Fijo

$$r_{k-1} = r_k$$
$$r_k = r_{k+1}$$

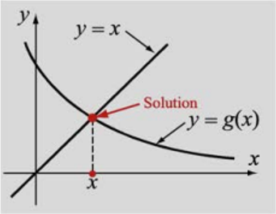
$$r_{k+1} = r_k - \frac{f\left(r_k\right)}{\frac{f(r_k)-f\left(r_{k-1}\right)}{r_k - r_{k-1}}}$$

$$f\left(r_{k+1}\right) < \epsilon_1$$
$$\left|r_{k+1} - r_k\right| < \epsilon_2$$
$$\left|\frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}}\right| < \epsilon_3$$

k	r_{k+1}	$f(r_{k+1})$	$\lvert r_{k+1} - r_k \rvert$	$\lvert \frac{r_{k+1}-r_k}{r_{k+1}} \rvert$
2	$r_k - \frac{f(r_k)(r_{k-1} - r_k)}{f(r_{k-1}) - f(r_k)} = 0.8985 - \frac{0.03497(0.877-0.8985)}{0.1542-0.03497} = 0.9048$	$4\cos(0.9048) - e^{0.9048} = 4 \cdot 0.6178 - 2.471438 = 2.47137 - 2.471438 = -0.00006618$	0.00631	0.00697
3	0.904788	0.0000000988	1.79×10^{-5}	1.976×10^{-5}
4	0.904788	0	1.76×10^{-7}	1.945×10^{-7}

Se requiere un valor inicial.
La nueva aproximación
de la raíz puede ser obtenida como:

$$r_{k+1} = g(r_k)$$



- Control de detención:

Verificar que:

$$f\left(r_{k+1}\right) = 0$$

En la práctica:

$$f\left(r_{k+1}\right) < \epsilon_1$$

$$\left|r_{k+1} - r_k\right| < \epsilon_2$$

$$\left|\frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}}\right| < \epsilon_3$$

- Actualización de variables:
- Condición de convergencia:

$$\left|\frac{dg\left(x\right)}{dx}\Big|_{x=\xi}\right| < 1$$

Ejemplo:

Obtener por el método de de Punto Fijo la raíz de la siguiente función considerando el valor inicial $x_0 = 0$:

$$f(x) = x - e^x$$

k	r_k	$f(r_k) < \epsilon_1$	$\lvert r_{k+1} - r_k \rvert < \epsilon_2$	$\left\lvert \frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}} \right\rvert < \epsilon_3$
0				
1				
2				
$\vdots$				

Definicion del problema

Clasificación de métodos

Métodos cerrados
Método de Bisección
Método de Regula Falsi

Métodos abiertos
Método de Newton-Raphson
Método de la Secante
Método de Punto Fijo

$$\left|\frac{dg(x)}{dx}\Big|_{x=\xi}\right| < 1 \qquad r_{k+1} = g(r_k) \qquad f(r_{k+1}) < \epsilon_1 \qquad |r_{k+1} - r_k| < \epsilon_2$$

$$\left|\frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}}\right| < \epsilon_3$$

k	r_k	$f(r_k)$	$\lvert r_{k+1} - r_k \rvert$	$\left\lvert \frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}} \right\rvert$
0	$x_0 = 0$	$f(x_0) = e^{-x_0} - x_0 = e^{-0} - 0 = 1$	—	—
1	$g(x)$: $e^{-x} = e^{-0} = 1$	$e^{-1} - 1 = -0.6321$	1	1
2	$e^{-1} = 0.3679$	$e^{-0.3679} - 0.3679 = 0.3243$; 0.6922	0.6321	1.7183
3	$e^{-0.3679} = 0.6922$	$e^{-0.6922} - 0.6922 = -0.1917$; 0.5005	0.3243	0.4685
4	$e^{-0.6922} = 0.5005$	$e^{-0.5005} - 0.5005 = 0.1058$	0.1917	0.3631