Sistemas de Ecuaciones Lineales (No Homogéneos)

- Método de Jacobi.
  - Algoritmo, Convergencia
- Método de Gauss Seidel.
  - Algoritmo

Autovalores y Autovectores

- Propiedades
- Método de la Potencia. Algoritmo, Convergencia
- Método de la Potencia Inversa
- El cociente de Rayleigh

Aplicaciones

INTRODUCCIÓN

Los **métodos iterativos** generan **una sucesión de soluciones aproximadas**,
que debe **converger a la solución exacta** del problema que se pretende resolver.

Cada iteración genera una solución aproximada, y su diferencia respecto de la solución exacta debe ser menor que en la iteración anterior para que exista convergencia

Tienen en general los siguientes componentes

- Inicialización o Acercamiento
- Recurrencia
- Control de Detención
- Actualización

y deben cumplir algún

CRITERIOS DE CONVERGENCIA

Para garantizar que se encontrará la solución del problema

MÉTODOS ITERATIVOS PARA RAICES DE ECUACIOENS NO LINEALES

Se busca el valor $x_{k+1} = r$ tal que $f(r) = 0$

Síntesis:

	Método Iterativo	
	Punto Fijo	Newton Raphson
Inicialización	Se propone una solución inicial x_0	
Recurrencia	$x_{k+1} = g(x_k)$	$r_{k+1} = r_k - \frac{f(r_k)}{m_k}$ *con* $m_k = \left.\frac{df}{dx}\right\|_{r_k}$
Control de Detención	$\|f(x_{k+1})\| \leq \varepsilon_f$ o $k \leq k\max$ $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon_a$ o $\left\|\frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}}\right\| \leq \varepsilon_r$	
Actualización	Retiene la última solución aproximada	
CRITERIOS DE CONVERGENCIA	$\left\| \left.\frac{dg(x)}{dx}\right\|_{x=\xi} \right\| < 1$	$\left\| \left.\frac{dg(x)}{dx}\right\|_{x=\xi} \right\| < 1$ *con* $g(x) = x - \frac{f(x)}{\frac{df}{dx}}$

La implementación se puede sintetizar de la siguiente forma:

Se eligen los valores de $x_0 \quad \varepsilon_a \quad \varepsilon_r \quad \varepsilon_f$ Inicialización

Se define **ban =true**

while **(ban)**

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

Recurrencia $r_{k+1} = r_k - \dfrac{f(r_k)}{m_k}$ *con* $m_k = \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{r_k}$

k=k+1

if $(\left|f(x_{k+1})\right| \leq \varepsilon_f)$

ban =false

end

Control de Detención

if $(\left|x_{k+1} - x_k\right| \leq \varepsilon_a)$

ban =false **end**

if $(k \leq k\max)$

ban =false

end

$$x_k = x_{k+1}$$

Actualización de Variables

end

Dada una Matriz **A** ε R^{NxN}, un vector **b** ε R^{N}, el sistema de ecuaciones lineales asociado es

$$\mathbf{A}\cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .... & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .... & a_{3N} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & .... & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ... \\ b_N \end{Bmatrix}$$

Es posible escribir

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{B}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & .... & a_{NN} \end{pmatrix} = \mathbf{D} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1N} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & .... & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & .... & a_{3N} \\ .... & .... & .... & 0 & .... \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & .... & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema se puede escribir

$$\mathbf{D}\cdot \underline{x} + \mathbf{B}\cdot \underline{x} = \underline{b}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MÉTODO DE JACOBI

Dada una Matriz **A** ε R^{NxN}, un vector **b** ε R^N, el sistema de ecuaciones lineales asociado es

$$\mathbf{A}\cdot \underline{x} = \underline{b}$$

El sistema se puede escribir

$$\mathbf{D}\cdot \underline{x} + \mathbf{B}\cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} = -\mathbf{D}^{-1}\cdot \mathbf{B}\cdot \underline{x} + \mathbf{D}^{-1}\cdot \underline{b}$$

$$\underline{x} = \mathbf{T}\cdot \underline{x} + \underline{c}$$

$$\mathbf{T} = -\mathbf{D}^{-1}\cdot \mathbf{B} \qquad \underline{c} = \mathbf{D}^{-1}\cdot \underline{b}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & .... & -a_{1N}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & .... & -a_{2N}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & .... & -a_{3N}/a_{33} \\ .... & .... & .... & 0 & .... \\ -a_{N1}/a_{NN} & -a_{N2}/a_{NN} & -a_{N3}/a_{NN} & .... & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{Bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \\ ... \\ b_N/a_{NN} \end{Bmatrix}$$

Se puede iterar con

$$\underline{x}^{(k+1)} = \mathbf{T}\cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{c}$$

Hasta encontrar que el ERROR es tan pequeño como se quiera

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MÉTODO DE GAUSS SEIDEL

A partir del método iterativo de Jacobi, cuyo fórmula de recurrencia está dada por

$$\underline{x}^{(k+1)} = \mathbf{T}\cdot\underline{x}^{(k)} + \underline{c}$$

Se puede iterar con

$$\underline{x}^{(k+1)} = \mathbf{Tl}\cdot\underline{x}^{(k+1)} + \mathbf{Ts}\cdot\underline{x}^{(k)} + \underline{c}$$

Hasta encontrar que el ERROR es tan pequeño como se quiera. Siendo

$$\mathbf{Tl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & .... & 0 \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & 0 & .... & 0 \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & 0 & .... \\ -a_{N1}/a_{NN} & -a_{N2}/a_{NN} & -a_{N3}/a_{NN} & .... & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x}^{(k+1)} = \begin{Bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ ... \\ x_N^{(k+1)} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{Ts} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & .... & -a_{1N}/a_{11} \\ 0 & 0 & -a_{23}/a_{22} & .... & -a_{2N}/a_{22} \\ 0 & 0 & 0 & .... & -a_{3N}/a_{33} \\ .... & .... & .... & 0 & .... \\ 0 & 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x}^{(k)} = \begin{Bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ ... \\ x_N^{(k)} \end{Bmatrix}$$

Se debe destacar que:

- para calcular x_1, participa todo el vector **x** de la iteración anterior.
- Para calcular x_2, participa x_1 de la iteración actual (recién calculado)y todas las demás componentes del vector **x** de la iteración anterior.
- Para calcular x_3, participa x_1 y x_2 de la iteración actual (recién calculadas)y todas las demás componentes del vector **x** de la iteración anterior.
- Para calcular x_4, participa x_1 ,x_2 y x_3 de la iteración actual (recién calculadas)y todas las demás componentes del vector **x** de la iteración anterior.
- Así se sigue hasta calcular x_N con todas las componentes de la iteración actual del vector x (recién calculadas), desde la 1 hasta la N-1.

Se itera con
$$\underline{x}^{(k+1)} = \mathbf{Tl}\cdot \underline{x}^{(k+1)} + \mathbf{Ts}\cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{c}$$

$$\mathbf{Tl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & .... & 0 \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & 0 & .... & 0 \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & 0 & .... \\ -a_{N1}/a_{NN} & -a_{N2}/a_{NN} & -a_{N3}/a_{NN} & .... & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{x}^{(k+1)} = \begin{Bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ \dots \\ x_N^{(k+1)} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{Ts} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & .... & -a_{1N}/a_{11} \\ 0 & 0 & -a_{23}/a_{22} & .... & -a_{2N}/a_{22} \\ 0 & 0 & 0 & .... & -a_{3N}/a_{33} \\ .... & .... & .... & 0 & .... \\ 0 & 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{x}^{(k)} = \begin{Bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \dots \\ x_N^{(k)} \end{Bmatrix}$$

Se debe destacar que:

- para calcular x_1, participa todo el vector $\underline{\mathbf{x}}$ de la iteración anterior.
- Para calcular x_2, participa x_1 de la iteración actual (recién calculado) y todas las demás componentes del vector $\underline{\mathbf{x}}$ de la iteración anterior.
- Así se sigue hasta calcular x_N con todas las componentes de la iteración actual del vector x (recién calculadas), desde la 1 hasta la N-1.

MÉTODOS ITERATIVOS

Síntesis

	Punto Fijo	Sistema de Ecuaciones Lineales	
Se busca	$x_{k+1} = r$ tal que $f(r) = 0$	$\underline{x}\ \varepsilon\ R^N$ tal que $\underline{f} = \mathbf{A} \cdot \underline{x} - \underline{b} = \underline{0}$	
Inicialización	Se propone una solución inicial x_0		
Recurrencia	$x_{k+1} = g(x_k)$	$\underline{x}^{(k+1)} = \mathbf{T} \cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{c}$	$\underline{x}^{(k+1)} = \mathbf{Tl} \cdot \underline{x}^{(k+1)} + \mathbf{Ts} \cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{c}$
Control de Detención	$\lvert f(x_{k+1}) \rvert \le \varepsilon_f$ o $\lvert x_{k+1} - x_k \rvert \le \varepsilon_a$ o $k \le k\max$		
Actualización	Retiene la última solución aproximada		
CRITERIOS DE CONVERGENCIA	$\left\lvert \left. \frac{dg(x)}{dx} \right\rvert_{x=\xi} \right\rvert < 1$	Mayor de los Valores Absolutos de **T** debe ser menor a 1 $\rho(\mathbf{T}) < 1$	Matriz **A** estrictamente diagonal dominante

En lugar de **Valor absoluto** de una variable real se usa **Norma de un Vector** de componentes reales