Doctorado en Ingeniería

Métodos Numéricos

Trabajo Práctico 4: Autovalores y Autovectores

Problema 1:
Dada la matriz $\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{2x2}$, se busca determinar sus autovectores y sus autovalores.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

- Encuentre el valor propio dominante y su correspondiente vector propio empleando el Método de las Potencias. Utilice el algoritmo <u>sin</u> escalamiento y considere ε=0,01 como factor de tolerancia.
- Encuentre el valor propio dominante y su correspondiente vector propio empleando el Método de las Potencias. Utilice el algoritmo <u>con</u> escalamiento con la norma infinito y considere ε=0,01 como factor de tolerancia.
- Encuentre el mínimo valor propio y su correspondiente vector propio, empleando el Método de las Potencias Inversas. Utilice el algoritmo sin escalamiento y considere ε=0,01 como factor de tolerancia.
- Encuentre el mínimo valor propio y su correspondiente vector propio, empleando el Método de las Potencias Inversas. Utilice el algoritmo <u>con</u> escalamiento con la norma infinito y considere ε=0,01 como factor de tolerancia.
- Represente en forma gráfica la curva de convergencia para cada uno de los casos analizados.

Problema 2:
Dada la matriz $\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{3x3}$, se busca determinar sus autovectores y sus autovalores.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Desarrollar un programa que encuentre el valor propio dominante y el vector propio asociado aplicando el Método de las Potencias con escalamiento con la norma infinito. El programa desarrollado debe evaluar un criterio de detención, además del número máximo de iteraciones. Graficar la evolución de la solución en función del número de iteración.
- Desarrollar un programa que encuentre el mínimo valor propio y el vector propio asociado aplicando el Método de la Potencia Inversa con escalamiento con la norma infinito. El programa desarrollado debe evaluar un criterio de detención, además del número máximo de iteraciones.
- Investigue sobre algún algoritmo alternativo para resolver el inciso anterior que evite el cálculo de la matriz inversa.

Problema 3:
Para la matriz $\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{4x4}$:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 32 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 32 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 16 \end{bmatrix}$$

- Empleando los códigos anteriormente desarrollados realizar **nueve** iteraciones con el Método de la Potencia con escalamiento, usando la norma infinito, con una tolerancia para el error absoluto de 10^{-20} y comenzando con el siguiente vector inicial:

$$y_0 = \begin{Bmatrix} -5 \\ 15 \\ 15 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

- Expresar con la información obtenida cual es la aproximación del autovalor y del autovector para la **séptima** nueva aproximación.

Problema 4:

Dado el problema generalizado de valores propios, $(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\ \underline{x} = \underline{0}$ hallar el mayor y el menor autovalor ω^2 y los autovectores $\underline{x}$ asociados. Para ello desarrollar un programa que permita encontrar el mayor autovalor y su autovector. Realizar otro programa que permita hallar el menor autovalor y su autovector. Los programas desarrollados deben emplear algoritmos con escalamiento con la norma infinito; y evaluar un criterio de detención, además del número máximo de iteraciones. Graficar la evolución de la solución en función del número de iteración.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Problema 5:

La ecuación diferencial en coordenadas polares que determina la frecuencia natural de vibración libre ω de una membrana circular de radio interno r_a y radio externo r_b, sometida a una tracción uniforme T, densidad por unidad de área ρ, está dada por:

$$T\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{T}{r}\frac{du}{dr} + \omega^2\rho\cdot u(r) = 0 \qquad si\ r\varepsilon\Omega = \{r\varepsilon R : ra \le r \le rb\}$$

$$con\ \ u(ra) = u(rb) = 0$$

Plantear una solución usando derivación numérica y al menos cinco puntos interiores en el dominio Ω. Encontrar el sistema de ecuaciones lineales que debe resolverse; y a continuación asigne valores a *ra*, *rb*, *T* y ρ, y calcule las incógnitas del problema.

Problema 6:

La ecuación diferencial en coordenadas polares que determina la frecuencia natural de vibración libre ω de una membrana circular de radio interno r_a y radio externo r_b, sometida a una tracción uniforme T, densidad por unidad de área ρ, está dada por:

$$T\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{T}{r}\frac{du}{dr} + \omega^2\rho\cdot u(r) = 0 \quad si \quad r\varepsilon\Omega = \{r\varepsilon R : ra \le r \le rb\}$$

$$con\ \ \left.\frac{du}{dr}\right|_{ra=0} \quad y \quad u(rb) = 0$$

Plantear una solución usando derivación numérica y al menos cinco puntos interiores en el dominio Ω. Encontrar el sistema de ecuaciones lineales que debe resolverse; y a continuación asigne valores a *ra*, *rb*, *T* y ρ, y calcule las incógnitas del problema.