Interpolación y Aproximación Polinomial

Claudio Careglio

Métodos Numéricos, Doctorado en Ingeniería

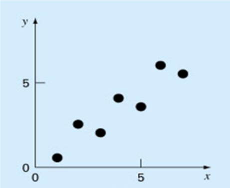
Plan de la presentación I

Interpolación vs Aproximación de funciones discretas

Interpolación
- Método directo
- Método de polinomios de Lagrange
- Método de polinomios de Newton
- Método de polinomios de Chebyshev
- Método de polinomios de Legendre
- Función error de interpolación

Aproximación
- Método de mínimos cuadradros

$$y = f(x) \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad (n+1) \text{ puntos } (x_i; y_i = f(x_i)) \text{ con } i = 0 \cdots n$$



(a)

Conjunto de funciones base: conjunto de funciones linealmente independientes.

$$P_m(\mathbf{x}) = \sum \underbrace{a_k}_{?} \underbrace{\phi_k(\mathbf{x})}_{\text{Base elegida}} \qquad \text{con} \qquad k = 0, 1, 2 \cdots m$$

Definición

El residuo se puede definir como:

$$r_i = f(x_i) - P_m(x_i) \qquad \text{con} \quad k = 0, 1, 2 \cdots m \quad i = 0, 1, 2 \cdots n$$

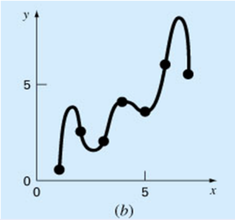
$$r_i = y_i - \sum a_k \phi_k(x_i)$$

$$\begin{Bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \dots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \dots & \phi_m(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \dots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{y} - \phi \mathbf{a}}$$

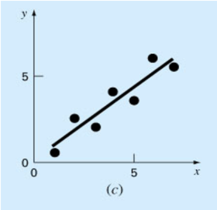
Interpolación

Forma fuerte: $r_i = 0$ para todo x_i



Aproximación

Forma débil: r_i “nulos en promedio“



Polinomio de interpolación, de colocación o polinomio interpolante: es el obtenido al asegurar que los residuos en los puntos datos son nulos.

- Recordando: Hay uno y solo un polinomio de grado a lo sumo n que se ajusta a $n+1$ puntos.
- Según sea la elección de las $\phi_k(\mathbf{x})$ se tienen distintos métodos: Directo, Lagrange, Newton, etc.
- Las $\phi_k(\mathbf{x})$ que utilizan cada uno de estos métodos son linealmente independientes entre sí, con lo que se puede generar un subespacio del espacio de todos los posible polinomios.
- Todos estos métodos conducen a expresiones distintas de un único polinomio.

- Producto escalar: entre dos funciones f y g definidas en el intervalo $[a, b]$ y a valores reales se define como:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

- Funciones ortogonales: dos funciones f y g son ortogonales en el intervalo $[a, b]$ si $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0$
- Cuando se interpola se exige que la función $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ ortognal (en el dominio de interés) a las funciones delta de Dirac definidas en cada x_i:

$$\langle \delta, \mathbf{r} \rangle = \int_a^b \delta(x - x_i)\, (f(\mathbf{x}) - P_n(\mathbf{x}))\, dx = 0 \qquad \forall x_i$$

Método directo

$y = f(x) \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad (n{+}1)$ puntos $(x_i; y_i = f(x_i))$ con $i = 0 \cdots n$

Base: $\phi = \{1, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \cdots, \mathbf{x}^n\}$
Se propone:

$$P_n(\mathbf{x}) = \sum a_k \mathbf{x}^k \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2 \cdots n \tag{1}$$

Considerando que el residuo es nulo, se determinan los a_k:

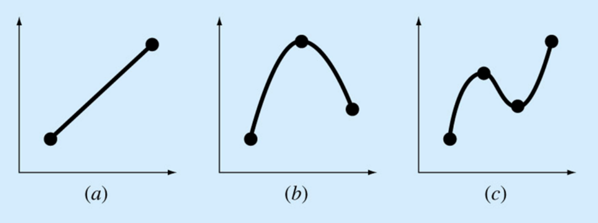
$$\mathbf{0} = \mathbf{y} - \phi \mathbf{a}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \dots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \dots & \phi_m(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \dots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix}$$

y considerando la base se obtiene un SEL:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

para que sea solución única $m = n$ y todos los x son distintos. De la expresión anterior puede demostrarse que el polinomio interpolante es el propuesto en la expresion (1).



- *Ejemplo:*

Dada la función discreta y=f(x) definida como:

x	y
3	5
7	-1
9	2

encontrar el polinomio interpolante con polinomios elementales. Evaluar en x=3,5 y x=9.

Método de polinomios de Lagrange

$y = f(x) \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad (n{+}1)$ puntos $(x_i; y_i = f(x_i))$ con $i = 0 \cdots n$

Base: $\phi = \{l_0(\mathbf{x}), l_1(\mathbf{x}), l_2(\mathbf{x}), \cdots, l_n(\mathbf{x})\}$

Definición:

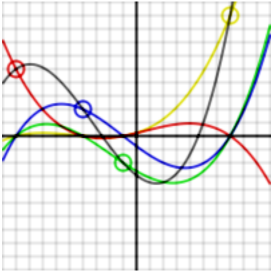
Polinomios de Lagrange:

$$l_i(\mathbf{x}) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)(x_i - x_3)\cdots(x_i - x_n)}$$

$$l_i(\mathbf{x}) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

Para los datos x_i y x_k se tiene que:

$$l_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$



Para el residuo nulo, se determinan los a_k a partir de:

$$\mathbf{0} = \mathbf{y} - \phi\mathbf{a}$$

o en forma análoga:

$$\begin{pmatrix} l_0(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_1(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & l_2(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

con lo que no es necesario resolver un SEL, ya que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

El polinomio interpolante será:

$$P_n(\mathbf{x}) = \sum y_k l_k(\mathbf{x}) \qquad \text{con} \qquad k = 0, 1, 2 \cdots n$$

- *Ejemplo:*

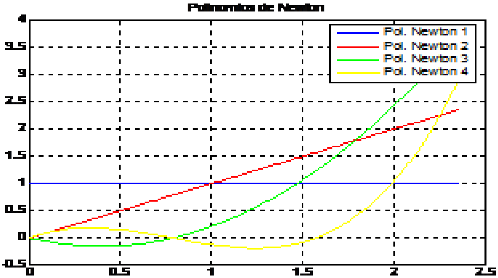
Dada la función discreta y=f(x) definida como:

x	y
3	5
7	-1
9	2

encontrar el polinomio interpolante con polinomios de Lagrange.
Evaluar en x=3,5 y x=9.

$$y = f(x) \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad (n+1) \text{ puntos } (x_i; y_i = f(x_i)) \text{ con } i = 0 \cdots n$$

Base: $\phi = \{n_0(\mathbf{x}), n_1(\mathbf{x}), n_2(\mathbf{x}), \cdots, n_n(\mathbf{x})\}$



Definición:

Polinomios de Newton:

$$
\begin{aligned}
n_0(x) &= 1 \\
n_1(x) &= n_0(x)(x - x_0) \\
n_2(x) &= n_1(x)(x - x_1) \\
n_3(x) &= n_2(x)(x - x_2) \\
&\vdots \\
n_k(x) &= n_{k-1}(x)(x - x_{k-1}) \qquad \forall k \geqslant 1
\end{aligned}
$$

Para el residuo nulo, se determinan los a_k a partir de:

$$\mathbf{0} = \mathbf{y} - \phi\mathbf{a}$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} n_0(x_0) & n_1(x_0) & n_2(x_0) & \dots & n_n(x_0) \\ n_0(x_1) & n_1(x_1) & n_2(x_1) & \dots & n_n(x_1) \\ n_0(x_2) & n_1(x_2) & n_2(x_2) & \dots & n_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_0(x_n) & n_1(x_n) & n_2(x_n) & \dots & n_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

o en forma similar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1(x_1 - x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1(x_2 - x_0) & 1(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1(x_n - x_0) & 1(x_n - x_0)(x_n - x_1) & \dots & 1(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

por lo que:

$$\begin{cases} a_0 & = y_0 \\ a_1 & = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ a_2 & = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \\ \vdots & \\ a_n & = \cdots \end{cases}$$

El polinomio interpolante será:

$$P_n(\mathbf{x}) = \sum a_k n_k(\mathbf{x}) \qquad \text{con} \qquad k = 0, 1, 2 \cdots n$$

- *Ejemplo:*

Dada la función discreta y=f(x) definida como:

x	y
3	5
7	-1
9	2

encontrar el polinomio interpolante con polinomios de Newton.
Evaluar en x=3,5 y x=9.

Definición

El polinomio de Chebyshev de grado n se puede definir como:

$$T_n(x) = cos\left(n\, cos^{-1}(x)\right)$$

Los Polinomios de Chebyshev son ortonormales en:

$$\mid T_n(x) \mid \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

Además, $T_n(x)$ posee n ceros en los puntos:

$$x_k = cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) k = 1, 2, \cdots n$$

Por lo tanto:

$$T_0(x) = cos\left(0\, cos^{-1}(x)\right) = 1 \tag{2}$$

$$T_1(x) = cos\left(1\, cos^{-1}(x)\right) = x \tag{3}$$

$$T_2(x) = cos\left(2\, cos^{-1}(x)\right) = cos^{-1}(2\theta) = 2\, cos^2\theta = 2x^2 - 1 \tag{4}$$

Relación de recurrencia:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

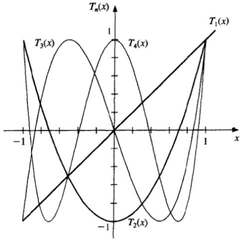
Se utilizan para obtener:

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$\ldots$$

Tabla 4.11 Polinomios de Chebyshev desde $T_0(x)$ hasta $T_7(x)$.

$T_0(x) = 1$
$T_1(x) = x$
$T_2(x) = 2x^2 - 1$
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$
$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$
$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

(a)



(b)

- Se puede demostrar que la elección de los ceros es la óptima para minimizar el error de interpolación de Lagrange (el cual aumenta en los extremos).
- La mejor elección de los nodos de interpolación para el problema de interpolación en $[-1, 1]$ es la de nodos de Chebyshev. La fórmula óptima que se obtiene es:

$$\mid f(x) - P_n(x) \mid \leqslant \frac{1}{2^n(n+1)!} \,\text{máx} \mid f^{(n+1)}(\xi) \mid \qquad \xi \,\epsilon [-1, 1]$$

Por otro parte, si incluimos un factor de peso (ponderación):

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Entonces, se puede demostrar que el producto interno es:

$$\langle T_m(x), T_n(x) \rangle = \int_{-1}^{1} w(x)\, T_m(x)\, T_n(x)\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} = \| T_n \|^2 & m = n \neq 0 \\ \pi = \| T_0 \|^2 & m = n = 0 \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_n(\mathbf{x}) &= a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \cdots + a_M T_M(x) \\ &= \sum a_k T_k(x) \end{aligned}$$

la fórmula del producto interno:

$$a_n \| T_n \|^2 = \int_{-1}^{1} w(x)\, T_m(x)\, T_n(x)\, dx$$

se puede utilizar para obtener los coeficientes: a

- El caso de los Puntos de Legendre es similar al caso de los Puntos de Chebysehv.
- Legendre más empleado para integración numérica (cuando interpolación se utiliza para derivar una fórmula de integración).
- Los puntos determinados por el Polinomio de Legendre son óptimos porque se minimiza el error de la fórmula de integración numérica.

Los polinomios de Legendre pueden ser expresados como:

$$P_0(x) = 1 \tag{5}$$

$$P_1(x) = x \tag{6}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \tag{7}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \tag{8}$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \tag{9}$$

$$\dots \tag{10}$$

$$P_j = \frac{1}{j}\left[(2j-1)xP_{j-1}(x) - (j-1)P_{j-2}(x)\right] \tag{11}$$

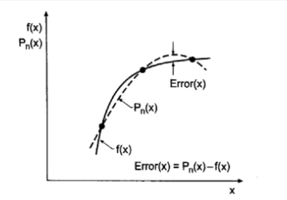
- Se deben calcular los respectivos coeficientes.
- Se deben calcular las raíces del Polinomio de Legendre.

Dados $(n+1)$ puntos $(x_i; y_i = f(x_i))$:

Definición

Se define función error de interpolación $E(\mathbf{x})$:

$$E(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - P_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum a_k \phi_k(\mathbf{x})$$



donde:

a_k: coeficientes que hacen $\mathbf{r} = 0$;

$\phi_k(\mathbf{x})$: Bases conocidas (Lagrange, Newton, etc.):

Además:

$$E(\mathbf{x})$$

tiene $(n+1)$ ceros en los x_i con lo que se puede expresar como un polinomio de al menos grado $(n+1)$:

$$E(\mathbf{x}) = C(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

La C se determinará de modo que la función auxiliar:

$$W(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - P_n(\mathbf{x}) - E(\mathbf{x})$$

sea:

$$W(\mathbf{x}) = 0 \qquad \forall x_k \quad k = 0, 1 \cdots n$$

o en forma análoga C se determinará de modo que se cumpla:

$$f(\mathbf{x}) = P_n(\mathbf{x}) + E(\mathbf{x}) \qquad \forall x_k \quad k = 0, 1 \cdots n$$

En resumen si: $W(\mathbf{x}) = 0$ en cada x_k dato $(k = 0, 1 \cdots n)$ es decir tiene $(n + 1)$ ceros. Para otro $x_i \neq x_k$ se adopta C para que

$W(x_i) = 0$, por lo que:

$$W(\mathbf{x}) \text{ tiene } (n+2) \text{ ceros para cada } x_i$$

$$\frac{dW}{dx} \text{ tiene } (n+2-1) \text{ ceros para cada } x_i$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} \text{ tiene } (n+2-2) \text{ ceros para cada } x_i$$

$$\frac{d^3W}{dx^3} \text{ tiene } (n+2-3) \text{ ceros para cada } x_i$$

$$\ldots$$

$$\frac{d^nW}{dx^n} \text{ tiene } (n+2-n) \text{ ceros para cada } x_i$$

$$\frac{d^{n+1}W}{dx^{n+1}} \text{ tiene } (n+2-n-1) \text{ tiene un cero para cada } x_i$$

siendo esta última derivada:

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}W}{dx^{n+1}} &= \frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}} - \frac{d^{n+1}P_n}{dx^{n+1}} - \frac{d^{n+1}E}{dx^{n+1}} \\ &= \frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}} - 0 - C(n+1)!\end{aligned}$$

obteniéndose C. Así para cada $x_i \neq x_k$ existe un C a partir del cual el error de interpolación se puede expresar como:

$$\boxed{E(\mathbf{x}) = \frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}\Big|_{x=\xi} \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}$$

donde $\xi \epsilon (x_0, x_n)$. De la expresión anterior:

- Error de interpolación en las abcisas datos es cero.
- Interpolación exacta si f(x) es un polinomio de hasta grado n.

Recordar que:

$y = f(x) \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad (n+1)$ puntos $(x_i; y_i = f(x_i))$ con $i = 0 \cdots n$

$$P_m(x) = \sum \underbrace{a_k}_{?} \; \underbrace{\phi_k(x)}_{\text{Base elegida}} \qquad \text{con} \qquad k = 0, 1, 2 \cdots m$$

$$r_i = f(x_i) - P_m(x_i) \qquad \text{con} \quad k = 0, 1, 2 \cdots m \quad i = 0, 1, 2 \cdots n$$

$$r_i = y_i - \sum a_k \phi_k(x_i)$$

Recordar $\longrightarrow$ *Forma débil: r_i "nulos en promedio"*

$$\begin{Bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \dots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \dots & \phi_m(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \dots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \phi \mathbf{a}$$

Los a_k son tales que minimizan la *suma de los Cuadrados de los residuos*:

$$min\|\mathbf{r}\|_2^2 = min\left(\sum (r_i(a_k))^2\right)$$

Para que la *suma de los Cuadrados de los residuos* tome un valor extremo la condición es:

$$\sum_{i=0,n} 2r_i(a_j)\cdot\phi_j(x_i) = \mathbf{r}^T\cdot\phi_j$$

$$= 0 \qquad\qquad j = 0, 1, 2\cdots m$$

resultando finalmente en las ecuaciones normales:

$$\phi^T\phi\mathbf{a} = \phi^T\ y$$

El polinomio obtenido será:

$$P_m(\mathbf{x}) = \sum a_k \phi_k(\mathbf{x}) \qquad \text{con} \qquad k = 0, 1, 2 \cdots m$$

Método de mínimos cuadradros

- *Ejemplo:*
Aproximación de Mínimos Cuadrados con bases polinómicas.
Dada la función discreta y=f(x) definida como:

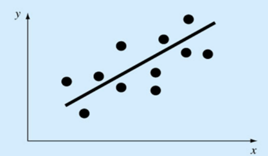
x	y
0	1
1	1
2	2
3	4

aproximar linealmente mediante mínimos cuadrados.

Método de mínimos cuadradros

Nota: Conduce a la forma:

$$\begin{pmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{Bmatrix}$$



- Ejemplo:

Aproximación de Mínimos Cuadrados con bases polinómicas.

Dada la función discreta y=f(x) definida como:

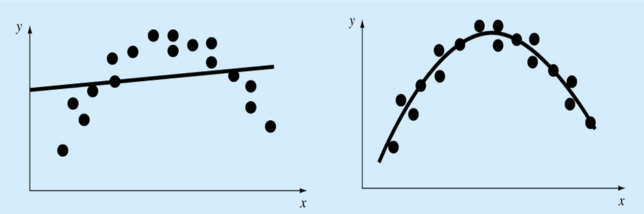
x	y
0	1
1	1
2	1
2	2
3	2
3	3
4	4
4	5

Método de mínimos cuadradros

aproximar por regresión polinómica de segundo grado.

Nota: Conduce a la forma:

$$\begin{pmatrix} N & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{Bmatrix}$$



- *Ejemplo:*
Aproximación de Mínimos Cuadrados con bases trigonométricas.
Dada la función discreta y=f(x) definida como:

x	y
-3	-0.1385
-1.5	-2.1587
0	0.833
1.5	2.2774
3	-0.511

aproximar mediante mínimos cuadrados considerando como funciones bases $cos(x)$ y $sin(x)$, tal que :
$f(x) = a_0 cos(x) + a_1 sin(x)$.

- *Ejemplo:*

Aproximación de Mínimos Cuadrados con bases exponenciales.

Dada la función discreta y=f(x) definida como:

x	y
1	5.1
1.25	5.79
1.5	6.53
1.75	7.45
2	8.46

encontrar los coeficientes a_0 y a_1 de la aproximación $y = a_1 e^{a_0 x}$ usando mínimos cuadrados.

Método de mínimos cuadradros