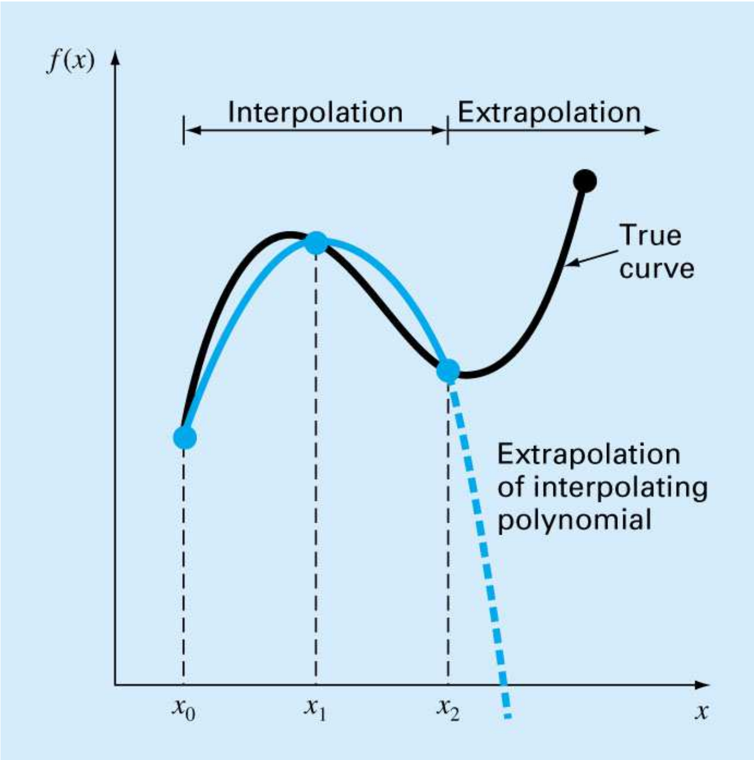
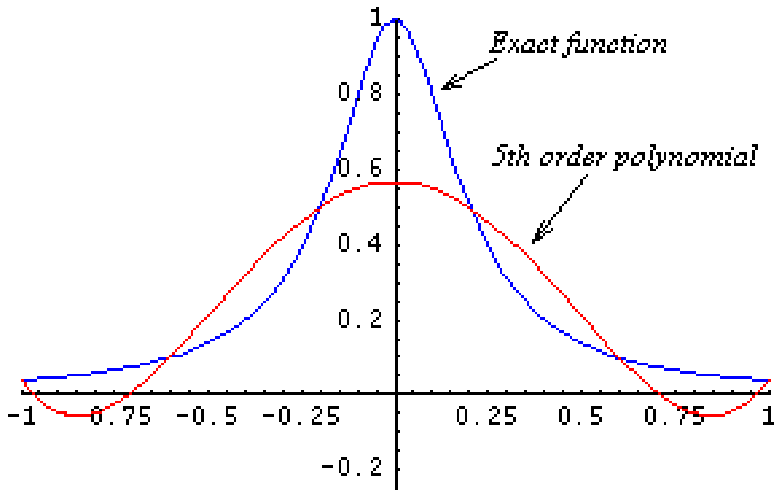
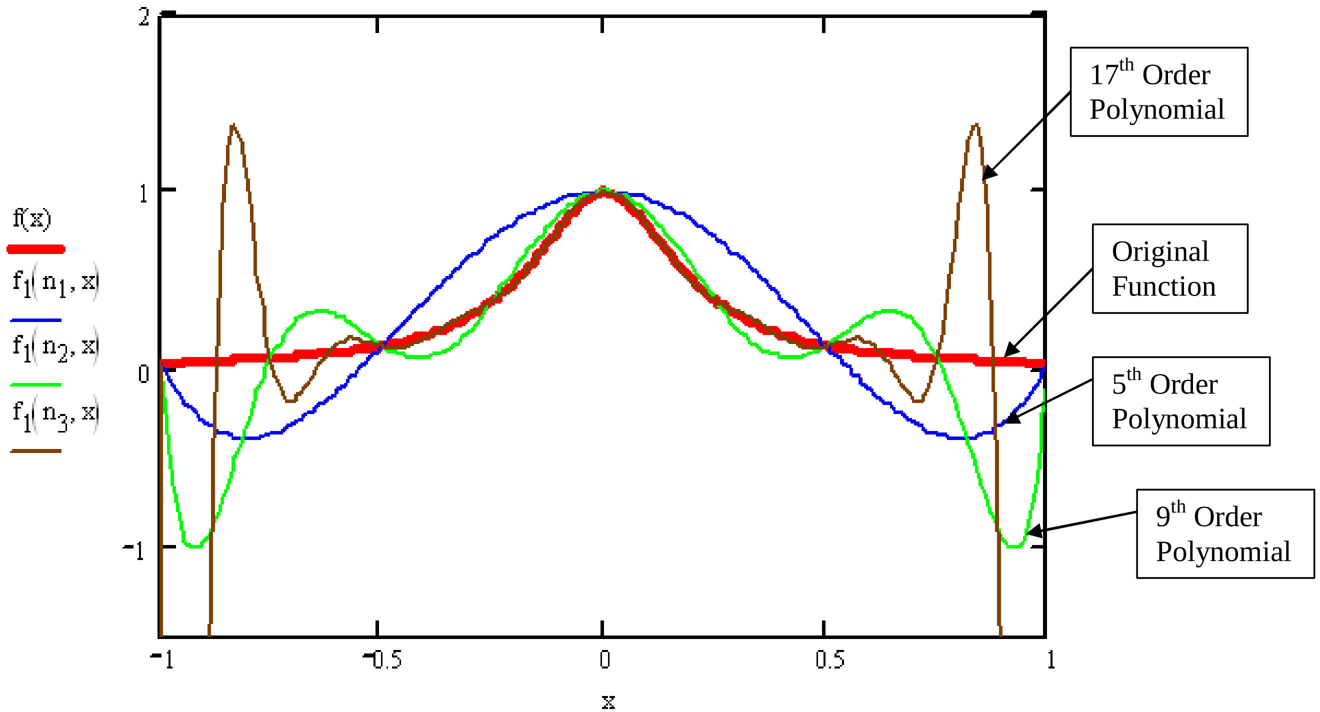
<u>Algunos comentarios sobre interpolación:</u>

- Interpolación mediante polinomios elegida porque son sencillos de:
  - Evaluar
  - Diferenciar
  - Integrar



- Polinomios de alto orden: **No es la mejor idea!**





- Alternativa a los métodos anteriores
    - Método de polinomios de **Hermite**
    - Método de interpolación con **splines cúbicos**

Método de polinomios de Hermite

- Se recurre a interpolar:
    - valores de la función $y=f(x)$,
    - de su derivada primera $y'=f'(\xi)$ → son datos

- Conjuntos de condiciones:

  $P(x_i)= y_i$ con $i=0,n$,

  $P'(x_i)= y'_i$ con $i=0,n$,

  representan $2n+2$ condiciones → Estas permiten determinar $2n+2$ coeficientes para polinomio resultante de grado $2n+1$.

- Los polinomios de Hermite resultan de:
  - interpolar el valor de la función y su derivada primera entre dos puntos:

    se conoce en dos puntos de abscisas x_i y x_{i+1} los valores de la función y_i e y_{i+1}, y los valores de sus derivadas primeras y'_i e y'_{i+1}:

    (x_i, y_i); (x_{i+1}, y_{i+1})

    (x_i, y'_i); (x_{i+1}, y'_{i+1})

  - Se tienen cuatro condiciones a cumplir, de modo que es posible plantear un polinomio de orden cúbico,

    $P(x) = a_0 + x\, a_1 + x^2\, a_2 + x^3\, a_3$

    $P'(x) = a_1 + 2\, x\, a_2 + 3\, x^2\, a_3$

    Al imponer las cuatro condiciones conocidas en los puntos, resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales → solución da los coeficientes de la combinación lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 \\ 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 & x_{i+1}^3 \\ 0 & 1 & 2x_i & 3x_i^2 \\ 0 & 1 & 2x_{i+1} & 3x_{i+1}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ y'_i \\ y'_{i+1} \end{Bmatrix}$$

- Es posible deducir estos polinomios en un domino “**estándar o unitario**” planteado el siguiente cambio de variables, o mapeo del eje x en el eje ξ:

$$\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\xi + 1}{2}$$

o bien

$$x(\xi) = x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{2}(\xi + 1) \quad \Rightarrow \quad \xi(x) = \frac{2}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) - 1$$

Así el polinomio se puede expresar:

$$P(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$ o matricialmente $P(\xi)$=**Ha**

De imponer (-1, y_i); (-1, y'_i); (1, y_{i+1}); (1, y'_{i+1}); se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_i \\ y_i' \\ y_{i+1} \\ y_{i+1}' \end{Bmatrix}$$ o matricialmente **Ca**=**y** con **y**= $\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_i \\ y_i' \\ y_{i+1} \\ y_{i+1}' \end{Bmatrix}$

Su solución es **a**=**C**$^{-1}$**y**, siendo:

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Así resulta $P(\xi)$=**H*****C**$^{-1}$**y**, o bien $P(\xi)$=**N*y**, con **N**= **H*****C**$^{-1}$

$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix}1 & \xi & \xi^2 & \xi^3\end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 1 & 2 & -1\\ -3 & -1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & N_3 & N_4\end{bmatrix}$$

$N_1(\xi)=(1/4)(2-3\xi+\xi^3) \quad = (1/4)(2+\xi)(1-\xi)^2$

$N_2(\xi)=(1/4)(1-\xi-\xi^2+\xi^3) \quad = (1/4)(1+\xi)(1-\xi)^2$

$N_3(\xi)=(1/4)(2+3\xi-\xi^3) \quad = (1/4)(2-\xi)(1+\xi)^2$

$N_4(\xi)=(1/4)(-1-1\xi+\xi^2+\xi^3) \quad = (1/4)(\xi-1)(1+\xi)^2$

Con las relaciones de $x(\xi)$, $\xi(x)$, $N_i(\xi)$ (i=1, 4), es posible calcular cualquier valor intermedio, y también obtener cualquier derivada. Para ello se debe considerar que:

$$\frac{dP}{dx}=\frac{dP}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}=\frac{2}{x_{i+1}-x_i}\frac{dP}{d\xi}=\left(\frac{2}{x_{i+1}-x_i}\right)\sum_{k=1}^{4}\frac{dN_k(\xi)}{d\xi}\cdot y_k$$

En forma matricial se puede expresar:

$$\frac{dP}{dx}=\left(\frac{2}{x_{i+1}-x_i}\right)\begin{bmatrix}\frac{dN_1(\xi)}{d\xi} & \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} & \frac{dN_3(\xi)}{d\xi} & \frac{dN_4(\xi)}{d\xi}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{Bmatrix}=(2/(x_{i+1}-x_i))*\mathbf{B}*\mathbf{y}$$

Interpolación con Splines Cúbicos

Dados **n+1 puntos** o nodos t_0, t_1, ... , t_n, de componentes (x_i, y_i) i=0, 1, ..., n, se busca una **función spline S(x)** de grado k que satisface los siguientes **requisitos**:

- **S es un polinomio de grado menor o igual** que k en cada subintervalo [x_i, x_{i+1}].
- **S tiene derivada continua de orden k-1** en todo el intervalo [x_0, x_n].
- S es un polinomio **continuo** en [x_0, x_n] de grado menor o igual a k, con derivadas continuas de orden k-1, pero definido por tramos.

Los splines **más usados son los cúbicos** que tienen las siguientes características:

- En cada **subintervalo [x_i, x_{i+1}]** el polinomio **S_i(x)** es **cúbico p**or consiguiente tiene 4 coeficientes a determinar.
- Existe continuidad de la función S(x),
- su derivada primera S'(x),
- y su derivada segunda S"(x), en todos los puntos del intervalo [x_0, x_n].

Se debe determinar **4 coeficientes** de cada polinomio cúbico, es decir, **4n coeficientes**. Se tiene como condiciones:

- en cada intervalo [x_i; x_{i+1}] el polinomio debe tomar el valor dato, esto es:
  $$\left.\begin{array}{l} S_i(x_i) = y_i \\ S_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{array}\right\}$$ en n subintervalos, o sea son 2n condiciones
- continuidad de S' en todos los t_i, es decir $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ en todos los puntos, salvo los extremos t_0, t_n. Es decir son n –1 condiciones.
- Continuidad de S" en todos los t_i $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$ son n –1 condiciones.

Se tienen entonces 2n + n –1 + n –1 = 4n – 2 condiciones y 4n coeficientes a determinar. La elección de las **dos condiciones** adicionales se usa según convenga.

- **Para determinar los coeficientes** de los polinomios en cada intervalo, se deben relacionar las **condiciones de continuidad** a cumplir con los datos que se tienen, que son las coordenadas (x_i, y_i) de los n puntos.

- Por cada par de valores (puntos) (x_i, y_i) (x_{i+1}, y_{i+1}) se debe encontrar los coeficientes del polinomio cúbico cumpliendo con los requisitos de continuidad.

  Se tienen como datos

  (x_i, y_i) (x_{i+1}, y_{i+1}) $h_i=x_{i+1}-x_i$.

  Se define $S''(x_i)=z_i$ $S''(x_{i+1})=z_{i+1}$.

  Los valores de **curvatura z_i** no se conocen y deben determinarse a partir de los requisitos de continuidad y de los puntos (x_i, y_i). Para ello se considera que si la **función de interpolación** que se busca es de grado 3, su curvatura (derivada segunda) tiene una variación lineal en x y se la puede escribir como

$$S''_i(x) = \frac{z_i}{h_i}(x_{i+1} - x) + \frac{z_{i+1}}{h_i}(x - x_i)$$

  que es una interpolación de la curvatura usando polinomios de Newton de orden 1.

  Si **se integra** $S''_i(x)$ respecto de x, resulta

$$S'_i(x) = -\frac{z_i}{z_{h_i}}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{z_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 + C$$

  e integrando una vez más, $S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + Cx + D$

Las constantes de integración C y D se obtienen al imponer (colocar) que el polinomio $S_i(x)$ pase por los puntos datos. Es decir,

$$\begin{cases} S_i(x_i) = y_i = z_i \dfrac{h_i^{\,2}}{6} + Cx_i + D \\ S_i(x_{i+1}) = y_{i+1} = z_{i+1} \dfrac{h_i^{\,2}}{6} + Cx_{i+1} + D \end{cases},$$

que es un sistema lineal en C y D

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_{i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_i - z_i \dfrac{h_i^{\,2}}{6} \\ y_{i+1} - z_{i+1} \dfrac{h_i^{\,2}}{6} \end{Bmatrix} = h_i \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \text{ siendo } \begin{cases} a = \dfrac{y_i}{h_i} - z_i \dfrac{h_i}{6} \\ b = \dfrac{y_{i+1}}{h_i} - z_{i+1} \dfrac{h_i}{6} \end{cases}.$$

Para resolver el sistema de 2 x 2 se puede hacer

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & x_i & h_i a \\ 1 & x_{i+1} & h_i b \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & x_i & h_i a \\ 0 & x_{i+1} - x_i & h_i b - h_i a \end{array}\right), \text{ de donde}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{h_i(b-a)}{x_{i+1} - x_i} = b - a \\ D &= h_i a - Cx_i = h_i a - (b-a)x_i \end{aligned}.$$

Así el término lineal Cx+D de $S_i(x)$ resulta,

$$\begin{aligned} Cx+D &= (b - a)\, x + h_i\, a - x_i(b - a) \\ &= bx - ax + h_i\, a - x_i\, b + x_i\, a \\ &= a\,(-x + h_i + x_i) + b\,(x - x_i) \\ &= a\,(x_{i+1} - x) + b\,(x - x_i) \end{aligned}$$

y de esta manera $S_i(x)$ resulta

$$S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3 + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right)(x_{i+1}-x) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1} h_i}{6}\right)(x-x_i)$$

y $$S'_i(x) = -\frac{z_i}{2h_i}(x_{i+1}-x)^2 + \frac{z_{i+1}}{2h_i}(x-x_i)^2 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1} h_i}{6}\right) - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right).$$

Para asegurar continuidad en $S'(x)$ se debe imponer $S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i)$.

De evaluar $S'_i(x)$ en $x = x_i$ se obtiene

$$S'_i(x_i) = -z_i\frac{h_i}{2} + \frac{y_{i+1}}{h_i} - z_{i+1}\frac{h_i}{6} - \frac{y_i}{h_i} + z_i\frac{h_i}{6}.$$

$$S'_i(x_i) = -z_i\frac{h_i}{3} - z_{i+1}\frac{h_i}{6} + \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{y_i}{h_i}$$

Si se considera la expresión de $S'_i(x)$, se puede deducir que

$$S'_{i-1}(x) = -\frac{z_{i-1}}{2h_{i-1}}(x_i-x)^2 + \frac{z_i}{2h_{i-1}}(x-x_{i-1})^2 + \left(\frac{y_i}{h_{i-1}} - z_i\frac{h_{i-1}}{6}\right) - \left(\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} - z_{i-1}\frac{h_{i-1}}{6}\right)$$

$$S'_{i-1}(x) = z_i\frac{h_{i-1}}{2} + \frac{y_i}{h_{i-1}} - z_1\frac{h_{i-1}}{6} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} + z_{i-1}\frac{h_{i-1}}{6}$$

$$S'_{i-1}(x) = z_i\frac{h_{i-1}}{3} + z_{i-1}\frac{h_{i-1}}{6} + \frac{y_i}{h_{i-1}} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

De igualar $S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i)$ se obtiene

$$-z_i \frac{h_i}{3} - z_{i+1}\frac{h_i}{6} + \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{y_i}{h_i} = z_i \frac{h_{i-1}}{3} + z_{i-1}\frac{h_{i-1}}{6} + \frac{y_i}{h_{i-1}} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

$$z_{i-1}\frac{h_{i-1}}{6} + z_i\left(\frac{h_{i-1}}{3} + \frac{h_i}{3}\right) + z_{i+1}\frac{h_i}{6} = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{y_i}{h_i} - \frac{y_i}{h_{i-1}} + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

$$z_{i-1}h_{i-1} + z_i\,2(h_{i-1} + h_i) + z_{i+1}h_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})$$

siendo las incógnitas de esta ecuación los valores de las curvaturas z_{i-1}, z_i, z_{i+1}.

Esta condición de continuidad de S'(x) se puede plantear para i = 1 hasta i = n –1 dando un sistema de (n – 1) ecuaciones con (n+1) incógnitas:

$$\begin{bmatrix} h_0 & u_1 & h_1 & & & & & \\ & h_1 & u_2 & h_2 & & & & \\ & & h_2 & u_3 & h_3 & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} & \\ & & & & & & h_{n-2} & u_{n-1} & h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \\ z_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_{n-2} \\ \gamma_{n-1} \end{Bmatrix},$$

siendo

$$\begin{aligned} h_i &= x_{i+1} - x_i \\ u_i &= 2(h_i + h_{i-1}) \\ \gamma_i &= \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) \end{aligned}$$

Para resolver el sistema de (n-1) ecuaciones con (n+1) incógnitas, se eligen dos de las incógnitas. La elección más conveniente es la que origina los **SPLINES CUBICOS NATURALES** y es $z_0 = z_n = 0$, y el sistema tridiagonal resulta de (n-1)·(n-1). Así, dados n +1 puntos (x_i, y_i) la solución del sistema de ecuaciones da los valores de curvaturas de los splines cúbicos naturales definidos por tramos mediante la expresión $S_i(x)$, que aseguran continuidad hasta segundo orden.