Planteo de Problema

Integración de Newton Cotes

- Método de Trapecios Simple y Múltiple
  - Regla de Integración y Error

- Método de Simpson Simple y Múltiple
  - Regla de Integración y Error

Extrapolación de Richardson e Integración de Romberg

Integración de Gauss Legendre

Ejemplos

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

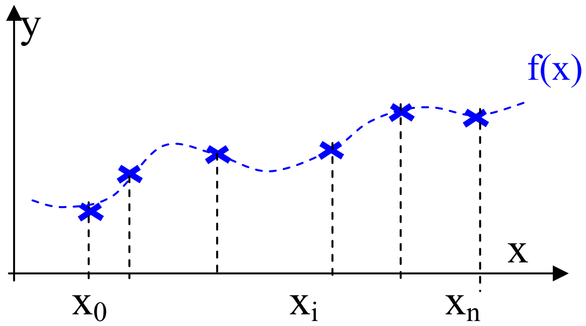
El propósito es abordar el **cálculo de integrales definidas** de funciones.

Se asume que:

la función **y = f(x):** R $\rightarrow$ R, **no singular, continua (al menos por tramos),** es conocida en forma

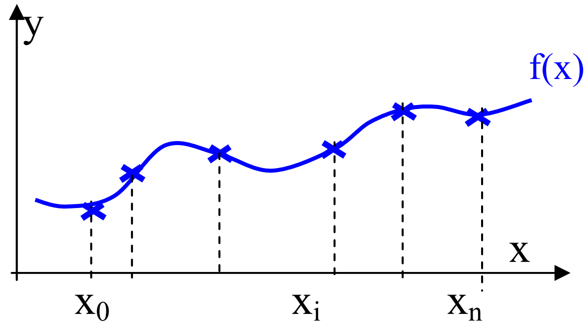
Discreta

f(x) se conoce en x_i, con i = 0,1,2,...,n



Analítica

f(x) se conoce en todo x $\in$ [x_0;x_n].



Se busca mostrar que:

es posible calcular la integral definida de la *y=f(x)* como una combinación lineal:

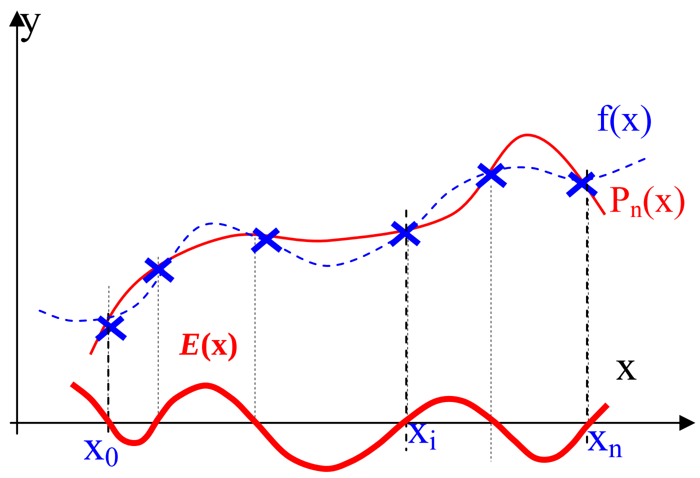
$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0,N} w_k \cdot f(x_k) = \sum_{k=0,N} w_k \cdot y_k \ ,$$

donde los coeficientes w_k son valores particulares para cada regla de integración y los $y_k = f(x_k)$ son los valores de la función discreta.

Si f(x) está dada en forma ***discreta*** es posible ***interpolar*** f(x) colocando un **polinomio $P_n(x)$,** de grado n, por los (n+1) puntos datos. Si f(x) está dada en forma ***analítica*** se pueden *"extraer"* esos (n+1) puntos, y tener la versión discreta de f(x).

Es posible expresar a f(x) como suma del Polinomio de Interpolación mas la función Error de Interpolación

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)........(x-x_n)$$



Resulta posible obtener la integral en la forma

$$I = \int_{X_0}^{X_n} f(x)dx = \int_{X_0}^{X_n} \left(P_n(x) + \varepsilon_n(x)\right)dx = \int_{X_0}^{X_n} P_n(x)dx + \int_{X_0}^{X_n} \varepsilon_n(x)dx$$

$$I = \int_{X_0}^{X_n} f(x)dx = \sum_{k=0,N} w_k \cdot y_k + \mathcal{E}_n = I_n + \mathcal{E}_n,$$

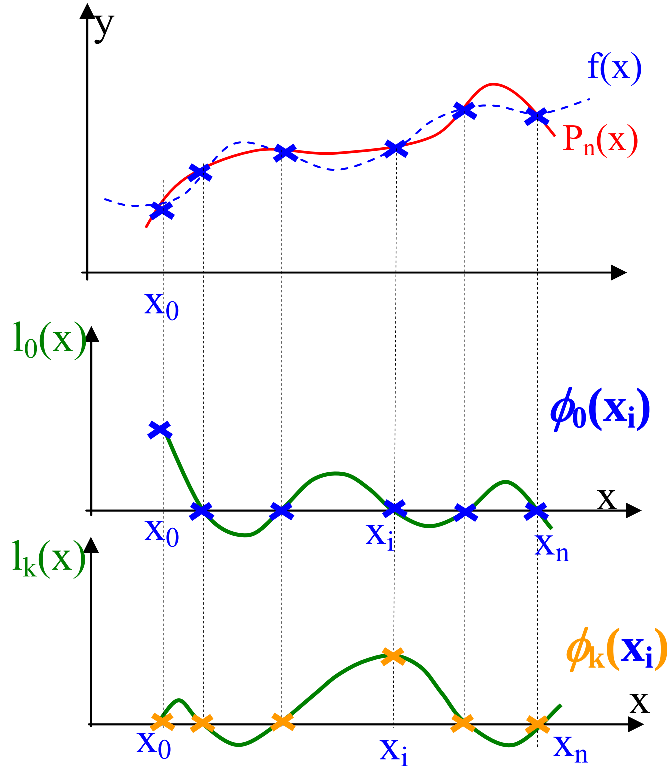
Resultando, la aproximación de la integral *In* y su Error de Integración *En* en la forma:

$$I_n = \int_{X_0}^{X_n} P_n(x)dx = \sum_{k=0,N} w_k \cdot y_k \qquad \mathcal{E}_n = \int_{X_0}^{X_n} \varepsilon_n(x)dx = \int_{X_0}^{X_n} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)dx$$

INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE NEWTON COTES

Las reglas de integración de Newton Cotes se basan en interpolar con **Polinomios de LAGRANGE**. Para los n+1 puntos datos, el polinomio interpolante es

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)$$



Así el valor aproximado de la integral

$$I_n = \int_{X_0}^{X_n} \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x) dx = \sum_{k=0,N} \int_{X_0}^{X_n} y_k \cdot l_k(x) \cdot dx$$

$$I_n = \sum_{k=0,N} y_k \cdot \int_{X_0}^{X_n} l_k(x) \cdot dx \cdot = \sum_{k=0,N} y_k \cdot w_k$$

resulta

$$w_k = \int_{X_0}^{X_n} l_k(x) \cdot dx = \int_{X_0}^{X_n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \cdot dx$$

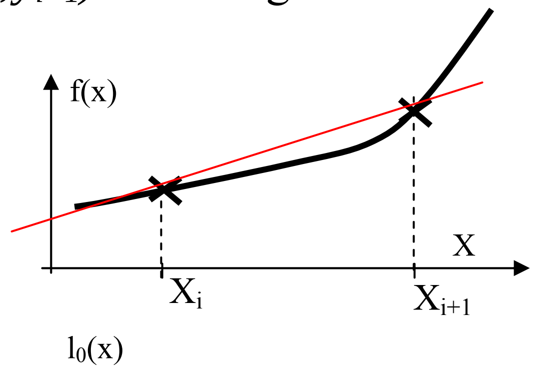
Así el Error de la aproximación de la integral

$$\mathcal{E}_n = \int_{X_0}^{X_n} \varepsilon_n(x) dx = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{X_0}^{X_n} (x - x_0) \cdots (x - x_n) dx = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot h^{n+2} \cdot \alpha_{n+1}$$

REGLA DE INTEGRACIÓN DE LOS TRAPECIOS

Es una regla de integración de Newton – Cotes por 2 puntos $(x_i;y_i)$, $(x_{i+1};y_{i+1})$. La integral

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cdot dx$$



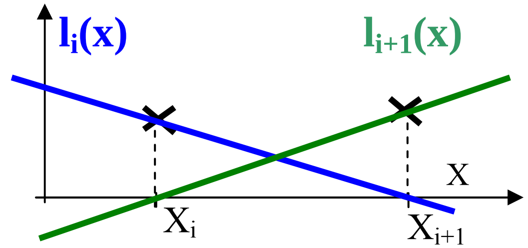
Se resuelve con un polinomio interpolante degrado uno

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[P_1(x)+\varepsilon_1(x)\right]dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[y_i\cdot l_i(x) + y_{i+1}\cdot l_{i+1}(x)\right]dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varepsilon_1(x)dx,$$

donde

$$l_i(x) = \frac{x-x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} = -\frac{x-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}$$ es una recta que vale 1 en x_i y 0 en x_{i+1},

$$l_{i+1}(x) = \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$ es una recta que vale 0 en x_i y 1 en x_{i+1}.



$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[y_i\cdot\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} + y_{i+1}\cdot\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right]dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}}\varepsilon_1(x)dx,$$

$$I = y_i\cdot\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}dx + y_{i+1}\cdot\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}}\varepsilon_1(x)dx = y_i\cdot w_i + y_{i+1}\cdot w_{i+1} + E_1$$

y, llamando **paso h_i** a la diferencia x_{i+1}-x_i y operando, se puede llegar a

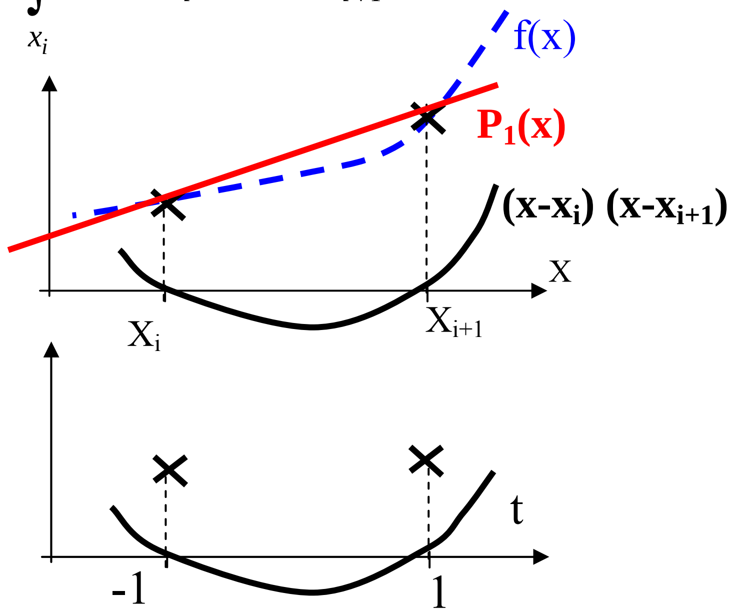
$$I = h_i\left[\frac{y_i}{2}+\frac{y_{i+1}}{2}\right] + \mathcal{E}_1 = I_1 + \mathcal{E}_1,$$

ERROR DE REGLA DE INTEGRACIÓN DE LOS TRAPECIOS

El error de interpolación es

$$\mathcal{E}_1 = \int_{x_a}^{x_b} \varepsilon_1(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1})dx = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)(x-x_{i+1})dx$$

siendo $\xi \in (x_i; x_{i+1})$.



Se propone hacer un cambio de variable mediante

$$\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} = \frac{t-(-1)}{1-(-1)},$$

Definiendo h=x_b-x_a, es posible despejar,

$$x - x_i = h(t+1)/2$$

$$x - x_{i+1} = h(t-1)/2$$

$$dx = (h/2)dt$$

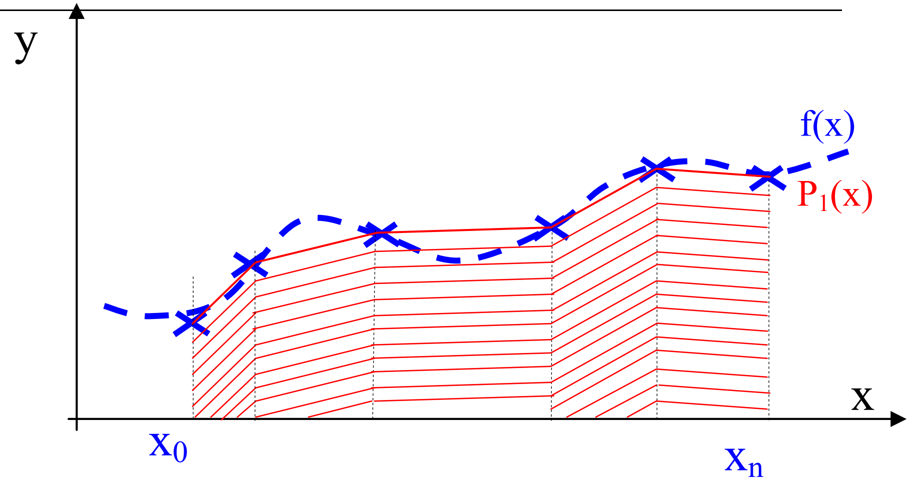
Así se puede hallar

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)(x-x_{i+1})dx = \int_{-1}^{1}\frac{h(t+1)}{2}\cdot\frac{h(t-1)}{2}\cdot\frac{h}{2}dt = \frac{h^3}{8}\int_{-1}^{1}(t^2-1)dt = -h^3\frac{1}{6}$$

de manera que, sustituyéndola en (5), se obtiene

$$\mathcal{E}_1 = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}\left(-\frac{1}{6}\right)h^3 = -\frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\xi)$$ para cierto punto $\xi \in (x_a, x_b)$.

REGLA DE INTEGRACIÓN DE LOS TRAPECIOS MÚLTIPLES



Se busca I ∈ R, $$I = \int_{X_0}^{X_n} f(x)dx.$$

Se divide el intervalo $[x_0; x_n]$
en subintervalos $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{n-1}; x_n]$. Así

$$I = \int_{X_0}^{X_1} f(x)\,dx + \int_{X_1}^{X_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{X_{n-1}}^{X_n} f(x)\,dx.$$

En cada uno de los n subintervalos se aplica la regla de los trapecios, se aplica trapecios simple

$$I = h_0 \frac{(y_0 + y_1)}{2} + \mathcal{E}_1(h_0^{\,3}) + h_1 \frac{(y_1 + y_2)}{2} + \mathcal{E}_1(h_1^{\,3}) + \ldots\ldots\ldots\ldots + h_{n-1} \frac{(y_{n-1} + y_n)}{2} + \mathcal{E}_1(h_{n-1}^{\,3}).$$

Si todos los intervalos tienen igual longitud h_i=h, esa fórmula se simplifica y se tiene la **regla de trapecios múltiple**:

$$I = h\left[\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_n}{2}\right] + \mathcal{E}_{1M} = \frac{h}{2}\left[y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} 2 \cdot y_i + y_n\right] + \mathcal{E}_{1M},$$

donde $\mathcal{E}_{1M}$ es el error total que se acumula al sumar los n errores provenientes de la aplicación de la regla en cada subintervalo, y está dado por

$$\mathcal{E}_{1M} = -\frac{(x_n - x_0)}{12} h^2 f^{(2)}(\xi)$$

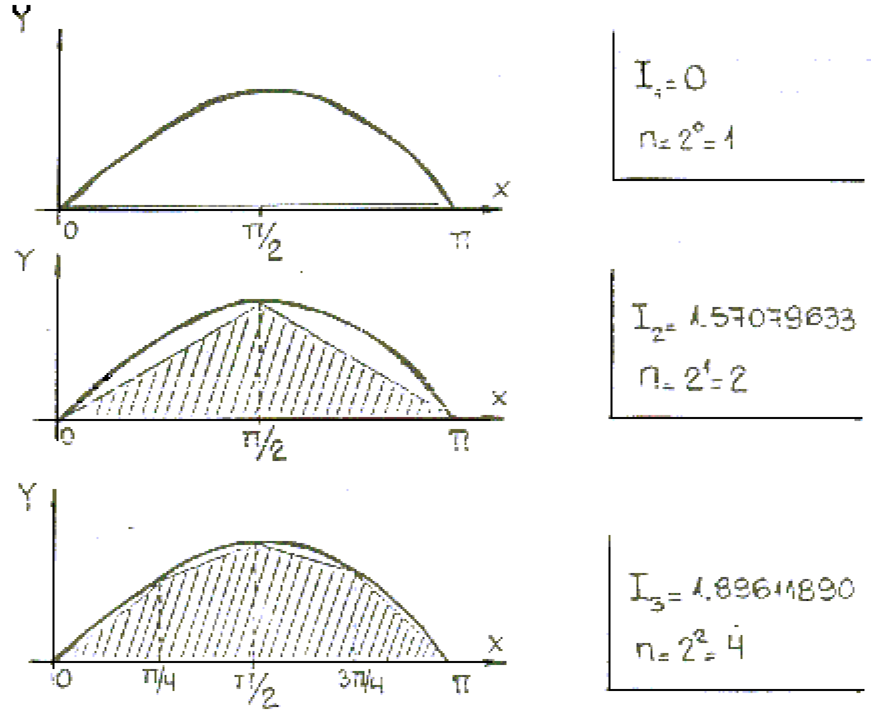
EJEMPLO DE LA REGLA DE INTEGRACIÓN DE LOS TRAPECIOS MÚLTIPLES

Se busca resolver $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \mathrm{sen}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$ cuyo resultado exacto es $\mathrm{I} = -\cos \mathrm{x}\big|_0^{\pi} = \cos 0 - \cos \pi = 2$

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \mathrm{sen}(\mathrm{x})\mathrm{dx} \approx \frac{h}{2} \cdot \left[y_0 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n \right] = \frac{h}{2} \cdot S \;,$$

donde $\quad y_i = \mathrm{sen}\,(x_i),\ i=0,\ldots,n.$

X	Y=sen(x)	$h_1 = \pi$	$h_2 = \pi/2$	$h_3 = \pi/4$
0	0	1	1	1
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	0	0	2
$\pi/2$	1	0	2	2
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	0	0	2
π	0	1	1	1
	0	S_1	S_2	S_3

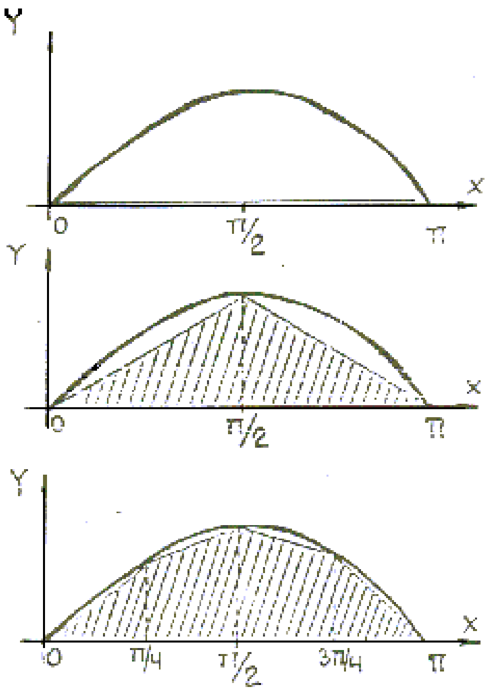


Es fácil concluir que la mejor aproximación es I_3.

Los errores cometidos por cada aplicación de la regla son, respectivamente $O(h_1^3)$, $O(h_2^2)$ y $O(h_3^2)$.

Extrapolación de Richardson para el ejemplo $I = \int_0^{\pi} \mathrm{sen}(x)\,dx$

A partir de dos valores aproximados de la Integral, obtenidos con la misma Regla y pasos distintos, es posible encontrar un valor mejorado mediante Extrapolación de Richardson.



$I_1 = 0$
$n = 2^0 = 1$

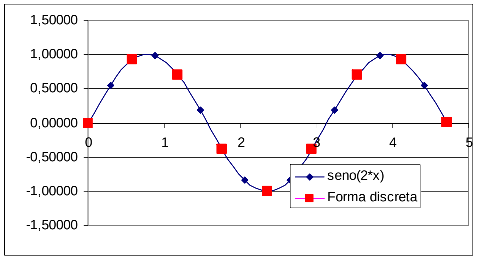
$I_2 = 1.57079633$
$n = 2^1 = 2$

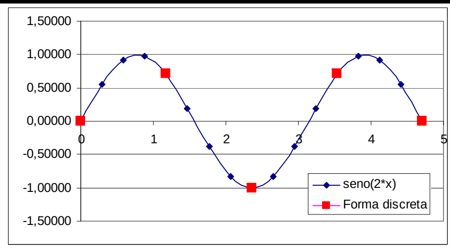
$I_3 = 1.89611890$
$n = 2^2 = 4$

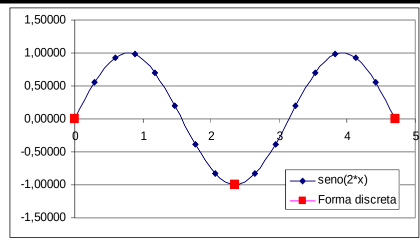
$$I = \frac{\beta\, I(h_2) - I(h_1)}{\beta - 1} \qquad \text{con } \beta = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^n$$

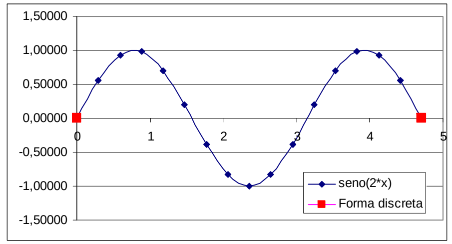
Ejemplo 2 Regla de Integración de los Trapecios Múltiples $Int = \int_0^{3\pi/2} \sin(2x)\,dx = \frac{-1}{2}\cos(2x)\Big|_0^{3\pi/2} = 1$

n		16	n	8	n	4	n	2	n	1
h		0,294524311	h	0,58905	h	1,1781	h	2,35619	h	4,7124
w		w* Sin(2x)	w	w* Sin(2x)	w	w* Sin(2x)	w	w* Sin(2x)	w	w* Sin(2x)
	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	2	1,111140466								
	2	1,847759065	2	1,84776						
	2	1,961570561								
	2	1,414213562	2	1,41421	2	1,4142				
	2	0,390180644								
	2	-0,765366865	2	-0,7654						
	2	-1,662939225								
	2	-2	2	-2	2	-2	2	-2		
	2	-1,662939225								
	2	-0,765366865	2	-0,7654						
	2	0,390180644								
	2	1,414213562	2	1,41421	2	1,4142				
	2	1,961570561								
	2	1,847759065	2	1,84776						
	2	1,111140466								
	1	2,1439E-15	1	2,1E-15	1	2E-15	1	2,1E-15	1	2E-15
Integral		**0,970916536**		**0,88157**		**0,488**		**-2,3562**		**5E-15**
h		0,294524311		0,58905		1,1781		2,35619		4,7124







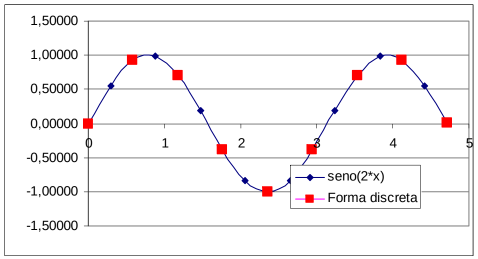


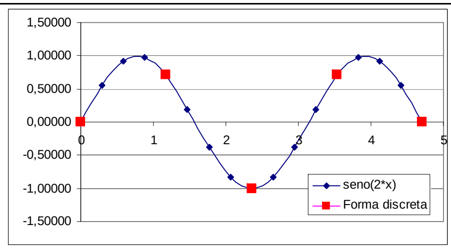
Extrapolación de Richardson para el ejemplo $Int = \int_0^{3\pi/2} \sin(2x)\,dx = \frac{-1}{2}\cos(2x)\Big|_0^{3\pi/2} = 1$

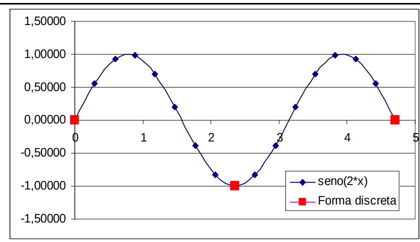
$$I = \frac{\beta\, I(h_2) - I(h_1)}{\beta - 1} \qquad \text{con} \quad \beta = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^n$$

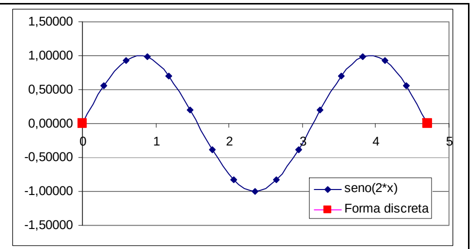
Y la extrapolación de Richardson sucesiva (Método de Romberg) resulta:

n	Orden	h^2	h^4	h^6	h^8	
Intervalos	**Paso h**	**I(h^2)**	**I(h^4)**	**I(h^6)**	**I(h^8)**	**I(h^10)**
16	0,29452	0,97092				
8	0,58905	0,88157	1,00069753			
4	1,1781	0,48798	1,01277013	0,999892687		
2	2,35619	-2,3562	1,43604331	0,98455192	1,000136191	
1	4,71239	5,1E-15	-3,14159265	1,741219036	0,972541331	1,00024441





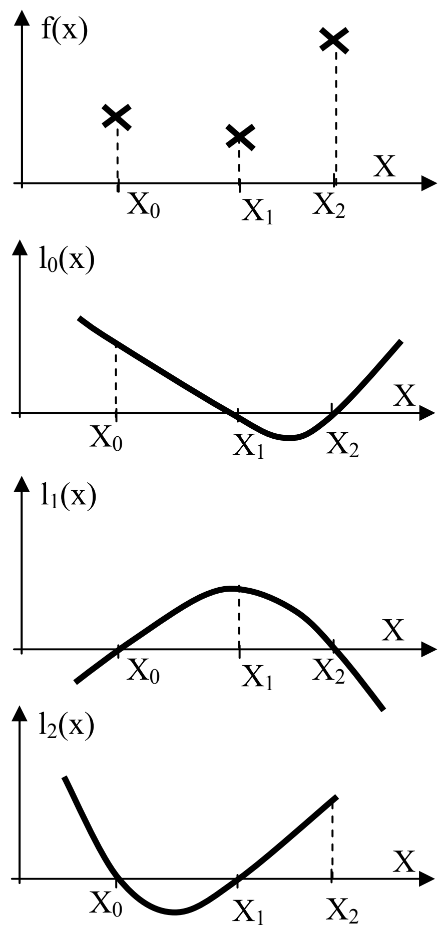




REGLA DE INTEGRACIÓN DE SIMPSON

Es una cuadratura de Newton – Cotes con n = 2, es decir con tres puntos. Se interpola mediante un polinomio de Lagrange de grado dos y luego se integra en forma aproximada ese polinomio.

$$I = \int_{X_0}^{X_2} f(x)dx ,$$



Si $f(x) = \sum Y_i \, l_i(x) + E_2(x)$, con i = 0,1,2,

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \quad l_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\varepsilon_2(x) = \frac{f^{(3)}}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$I_2 = \sum_{i=0}^{2} y_i \omega_i \quad \omega_i = \int_{x_0}^{x_2} l_i(x)dx, \, i = 0,1,2. \quad \mathcal{E}_2 = \int_{x_0}^{x_2} \varepsilon_2(x)dx$$

Entonces, si los intervalos son iguales ($h_1 = h_2 = h$), se tiene:

$$I = h\left[\frac{1}{3}y_0 + \frac{4}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

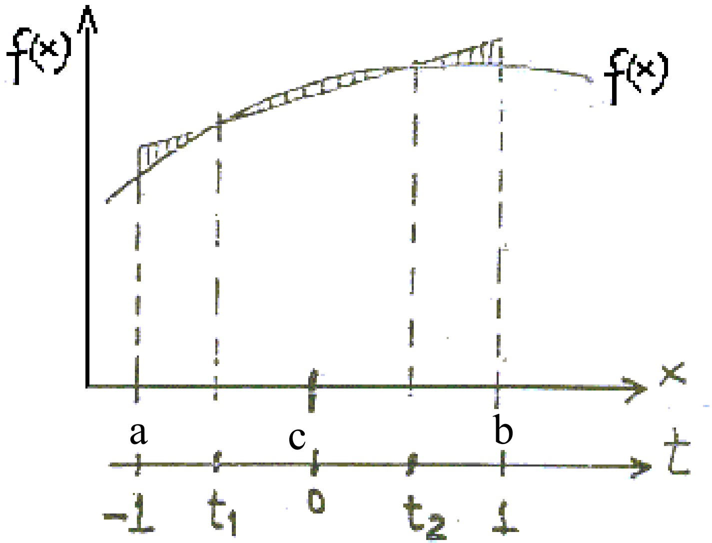
INTEGRACIÓN DE GAUSS LEGENDRE

Se busca resolver la

$$I = \int_a^b f(x)dx = h\int_{-1}^{1} G(t)dt = h\left(\sum_{i=0}^{n} \omega_i G(t_i) + R\right) = h\sum_{i=0}^{n} \omega_i G(t_i) + \mathcal{E}$$

$$G(t) = f(c + (\frac{b-a}{2}) \cdot t) \qquad x = c + (\frac{b-a}{2}) \cdot t$$

El problema se resuelve en el dominio unitario [-1, 1], mediante Mapeo o Cambio de variables conveniente.



$$\int_{-1}^{1} G(t)dt = \omega_1 G(t_1) + \omega_2 G(t_2) + R$$

ω_1, ω_2, t_1, t_2 deben ser tales que el error de integración sea R = 0 para polinomios de hasta 3º grado. Comparando los resultados exactos de la integral con el resultado propuesto por la regla, se tiene:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} 1dt = 2 = 1\omega_1 + 1\omega_2 \\
&\int_{-1}^{1} tdt = 0 = t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \\
&\int_{-1}^{1} t^2dt = \frac{2}{3} = t_1^{\,2}\omega_1 + t_2^{\,2}\omega_2 \\
&\int_{-1}^{1} t^3dt = 0 = t_1^{\,3}\omega_1 + t_2^{\,3}\omega_2
\end{aligned}\right\} \quad
\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = 1 \\
&-t_1 = t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

$$I = h\left[G\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + G\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] + \mathcal{E}$$

Integración de Gauss Legendre. Generalización.

Se busca resolver la

$$\int_{-1}^{1} G(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \omega_i G(t_i) + R$$

En una regla de n+1 puntos existen 2n+2 coeficientes a determinar, que son los (n+1) w_k y las (n+1) abscisas t_k. Se exige que la regla de integración sea exacta cuando integra polinomios de hasta grado 2n+1. Dada una función polinómica $G(t)$ de hasta grado (2n+1), existen polinomios $C_n(t)$ y $r_n(t)$ de grado menor o igual a n, tales que

$$G(t)= C_n(t)\, p_{n+1}(t) + r_n(t)$$

Siendo $p_{n+1}(t)$ un polinomio de grado (n+1), que en particular puede ser un polinomio de Legendre. Así es posible expresar la integral

$$I = \int_{-1}^{1} G(t)\, dt = \int_{-1}^{1} (C_n(t)\, p_{n+1}(t) + r_n(t))\, dt = \int_{-1}^{1} C_n(t)\, p_{n+1}(t) dt + \int_{-1}^{1} r_n(t)\, dt = \int_{-1}^{1} r_n(t)\, dt = \sum_{k=0,n} w_k\, r_n(t_k)$$

Ya que **cualquier polinomio de grado n es ortogonal al polinomio de Legendre de grado n+1** en el dominio [-1,1]. Para elegir las abscisas t_k, es posible elegir las (n+1) **raíces del polinomio de Legendre** $\boldsymbol{p_{n+1}(t)}$ de grado (n+1), que se las denomina t_r, y en las que se verifica que

$$G(t_r)= C_n(t_r)\, p_{n+1}(t_r) + r_n(t_r)= r_n(t_r)$$

Así la integral resulta

$$I = \int_{-1}^{1} G(t)\, dt = \int_{-1}^{1} r_n(t)\, dt = \sum_{k=0,n} w_k\, r_n(t_k) = \sum_{k=0,n} w_k\, G(t_k)$$

Para calcular los w_k,

Es posible plantear una **interpolación del polinomio de grado n** $r_n(t)$, con polinomios de Lagrange, tomando como abscisas conocidos las (n+1) raíces t_k del polinomio de Legendre de grado (n+1)

$$r_n(t)= r_n(t_0)\, l_0(t) + r_n(t_1)\, l_1(t) + r_n(t_2)\, l_2(t) + \dots\, r_n(t_n)\, l_n(t)$$

o bien considerando que $G(t_r)= r_n(t_r)$

$$r_n(t)= G(t_0)\, l_0(t) + G(t_1)\, l_1(t) + G(t_2)\, l_2(t) + \dots\, G(t_n)\, l_n(t)$$

$$I = \int_{-1}^{1} G(t)\,dt = \int_{-1}^{1} r_n(t)\,dt = \int_{-1}^{1}\left[\sum_{k=0,n} G(t_k)\, l_k(t)\right]dt = \sum_{k=0,n}\left[\int_{-1}^{1} G(t_k) l_k(t)\,dt\right]$$

$$I = \int_{-1}^{1} G(t)\,dt = \sum_{k=0,n}\left[G(t_k)\int_{-1}^{1} l_k(t)\,dt\right] = \sum_{k=0,n} w_k\, G(t_k) \qquad \text{Con} \qquad w_k = \int_{-1}^{1} l_k(t)\,dt$$

Es decir que los coeficientes w_k son las integrales de los polinomios de Lagrange de grado n+1, definidos por las (n+1) raíces t_k de los polinomios de Legendre de grado n+1. Así resulta,

$I = \int_{-1}^{1} G(t)\,dt = \sum_{k=0,n} w_k\, G(t_k)$	Siendo $w_k = \int_{-1}^{1} l_k(t)\,dt$	Y (t_r) raíces del Polinomio de Legendre $p_{n+1}(t_r)=0$

Se toma (n+1) puntos de Gauss (raices del polinomio de grado n+1),
y se puede integrar en forma exacta hasta polinomios de grado (2n+1)

(n+1)Puntos de Gauss	1	2	3	4
Grado exacto	1	3	5	7