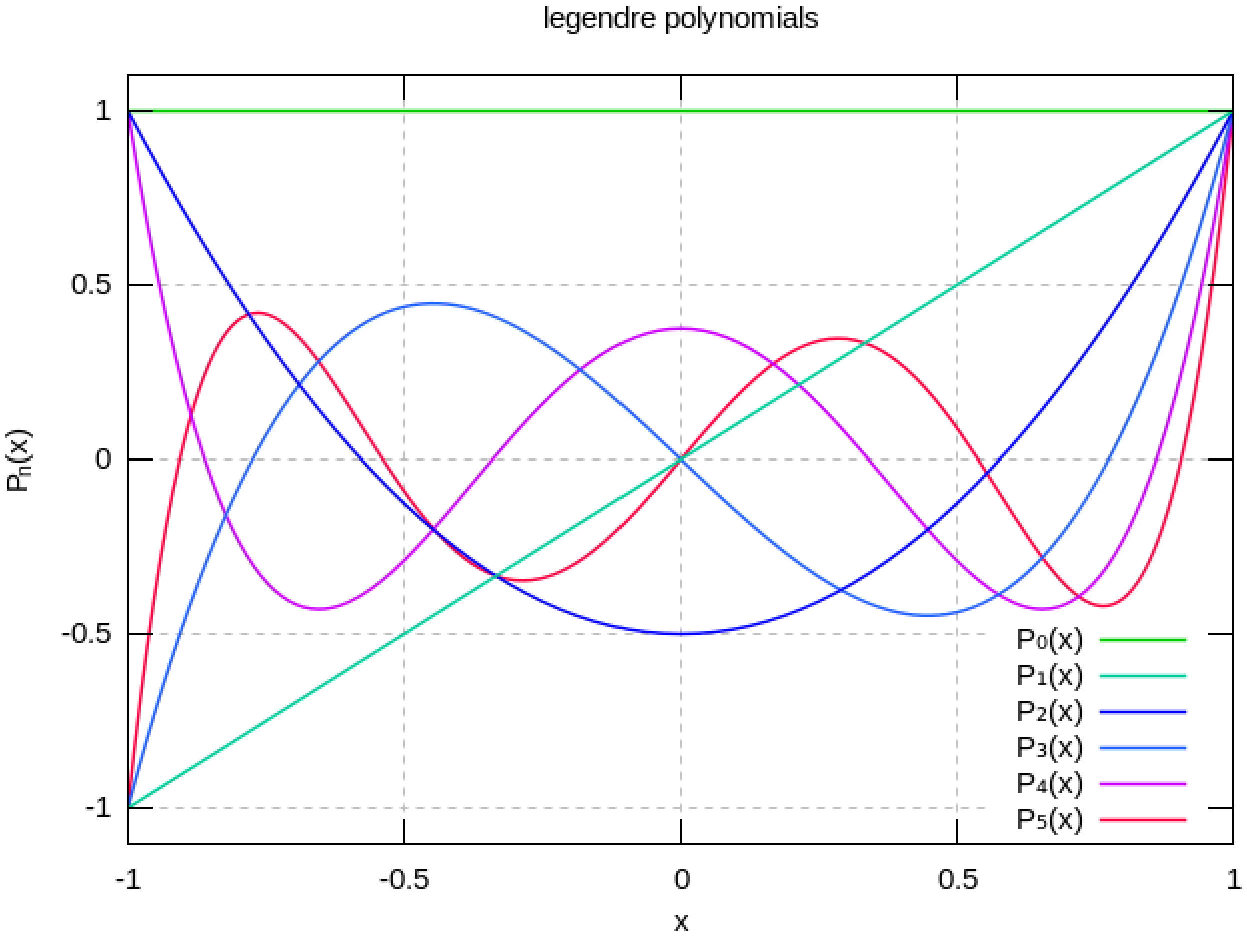
- Algunos comentarios sobre polinomios de Legendre:
  Recordar cual era el valor de t para dos P.G.



n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2-3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5-70x^3-15x)$
6	$\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$
7	$\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x)$
8	$\frac{1}{128}(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35)$
9	$\frac{1}{128}(12155x^9-25740x^7+18018x^5-4620x^3-315x)$
10	$\frac{1}{256}(46189x^{10}-109395x^8+90090x^6-30030x^4+3465x^2-63)$

- Valores de PG y pesos (Gauss-Legendre):

Points	Weighting factor	Function argument	Exact for
2	1.0 1.0	-0.577350269 0.577350269	up to 3rd degree
3	0.5555556 0.8888889 0.5555556	-0.774596669 0.0 0.774596669	up to 5th degree
4	0.3478548 0.6521452 0.6521452 0.3478548	-0.861136312 -0.339981044 0.339981044 0.861136312	up to 7th degree
6	0.1713245 0.3607616 0.4679139 0.4679139 0.3607616 0.1713245	-0.932469514 -0.661209386 -0.238619186 0.238619186 0.661209386 0.932469514	up to 11th degree

MÉTODO DE INTEGRACIÓN DE ROMBERG

- Consiste en aplicar sucesivas extrapolaciones de Richardson, sobre una serie de aproximaciones de trapecios múltiples, para pasos que se reducen a la mitad.

- Si en k = 1 se tienen los valores de trapecios múltiple:

h_1 $I(h_1)=I_{11};E(h_1^2)$

$\beta=2^2=(h_1/h_2)^2$ $I^*=(4I_2-I_1)/3$ $;E(h_1^4)$

$h_2=h_1/2$ $I(h_2)=I_{21};E(h_2^2)$

$\beta=2^2=(h_2/h_3)^2$ $I^{**}=(4I_3-I_2)/3$ $;E(h_2^4)$ ....

$h_3=h_2/2$ $I(h_3)=I_{31};E(h_3^2)$

$\beta=2^2=(h_3/h_4)^2$ $I^{***}=(4I_4-I_3)/3$ $;E(h_3^4)$

$h_4=h_3/2$ $I(h_4)=I_{41};E(h_4^2)$

K = 2

K = 1

- Las iteraciones $k \geq 2$ que corresponden a mejoras por extrapolación de Richardson se pueden generalizar

$$I_{j,k} = \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

- El criterio de parada de las iteraciones es:

$$\left| \frac{I_{1,k} - I_{1,k-1}}{I_{1,k}} \right| < \text{Tolerancia},$$

o bien $k >$ Número Máximo de Iteraciones.

- EJEMPLO:

$$I = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx \qquad I_{,j,k} = \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
		$I_{j,2} = \frac{4 I_{j+1,1} - I_{j,1}}{3}$	$I_{j,3} = \frac{16 I_{j+1,2} - I_{j,2}}{15}$	$I_{j,4} = \frac{64 I_{j+1,3} - I_{j,3}}{63}$	$I_{j,5} = \frac{256 I_{j+1,4} - I_{j,4}}{255}$	$I_{j,6} = \frac{1024 I_{j+1,5} - I_{j,5}}{1023}$
h	I (trapecios)					
$h_1=\pi$	$I_1=0$	2,09439511	1,99857073	2,00000555	1,9999999	2,0000000
$h_2=\pi/2$	$I_2=1,57079633$	2,00455976	1,9998313	2,0000001		
$h_3=\pi/4$	$I_3=1,89611890$	2,00026917	1,99999975	2,00000000		
$h_4=\pi/8$	$I_4=1,97423160$	2,00001695	2,00000000			
$h_5=\pi/16$	$I_5=1,99357034$	2,00000103				
$h_6=\pi/32$	$I_6=1,98839336$					
	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	$O(h^{10})$	$O(h^{12})$