Planteo de Problema

Derivadas a partir de Interpolación con Polinomios de Newton

- Derivada Primera
- Derivada Segunda

Derivadas a partir de Serie de Taylor

- Derivada Primera
- Derivada Segunda

Extrapolación de Richardson

Ejemplos

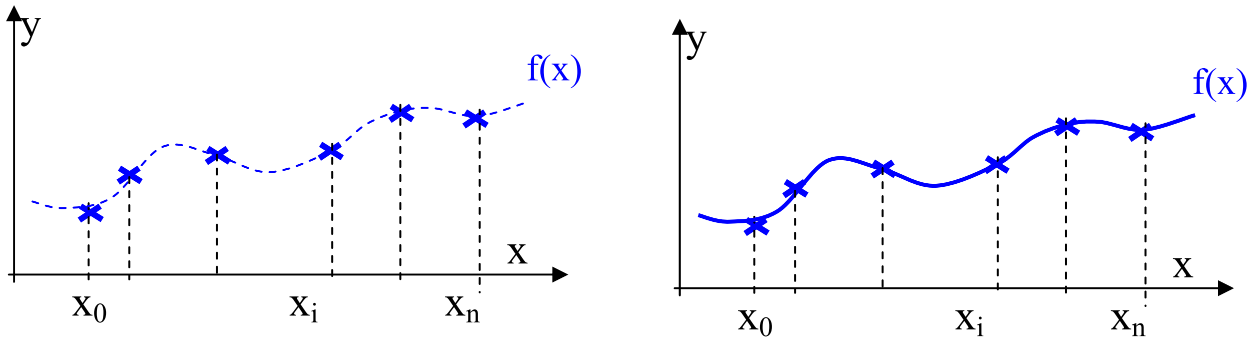
DERIVACIÓN NUMÉRICA

El propósito es abordar el **cálculo de derivadas de distinto orden** de funciones discretas.

Supuestos

La función **$y = f(x)$:** R $\rightarrow$ R, **no singular, continua,** es conocida en forma

Discreta	***Analítica***
f(x) se conoce en x_i, con i = 0,1,2,...,n	f(x) se conoce en todo $x \in [x_0;x_n]$.



Hipótesis

Es posible calcular la derivada n-ésima de la *y=f(x)* evaluada en *Xj* como una suma:

$$D = \left. \frac{d^n(f(x))}{dx^n} \right|_{Xj} = \sum_{k=0,N} c_k \cdot f(x_k) = \sum_{k=0,N} c_k \cdot y_k = \vec{c}^{\,T} \cdot \vec{y} ,$$

Donde los coeficientes c_k son valores particulares para cada regla de derivación y los $y_k=f(x_k)$ son los valores de la función discreta.

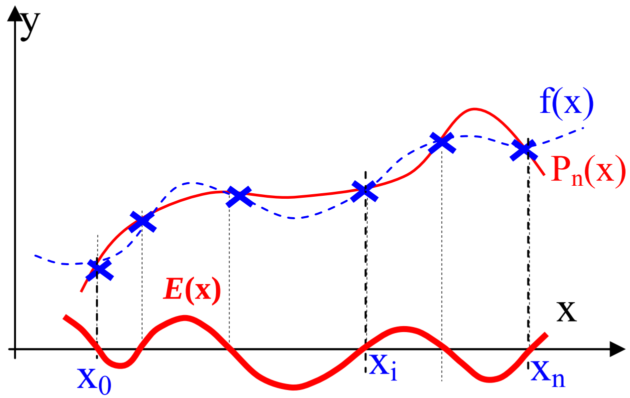
Si f(x) está dada en forma discreta es posible ***interpolar*** f(x) colocando un **polinomio $P_n(x)$,** de grado n, por los (n+1) puntos datos.

Si f(x) está dada en forma ***analítica*** se pueden *"extraer"* esos (n+1) puntos, para la versión discreta de la función f(x).

Es posible expresar:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots.(x-x_n)$$

suma del Polinomio de Interpolación mas la función Error de Interpolación.



Resulta posible

$$D = \left.\frac{d^n(f(x))}{dx^n}\right|_{Xj} = \sum_{k=0,N} c_k \cdot f(x_k) + \mathcal{E}_n = \sum_{k=0,N} c_k \cdot y_k + \mathcal{E}_n = \vec{c}^{\,T} \cdot \vec{y} + \mathcal{E}_n$$

Si f(x) está dada en forma discreta con (n+1) puntos, es posible interpolar f(x) colocando un polinomio de grado n. A partir de

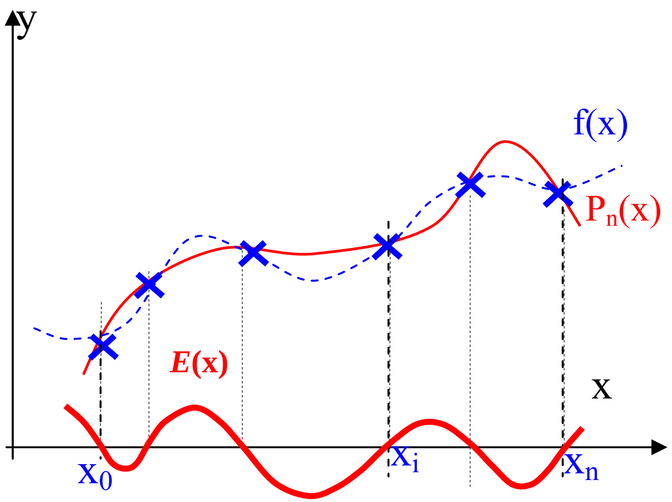
$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)........(x-x_n)$$

Es posible obtener derivadas hasta de grado n, y evaluarlas en cualquier punto *Xj*, de la forma:

$$D = \left.\frac{d^n(f(x))}{dx^n}\right|_{Xj} = \left.\frac{d^n\left(P_n(x)+\varepsilon_n(x)\right)}{dx^n}\right|_{Xj}$$

$$D = \left.\frac{d^n\left(P_n(x)\right)}{dx^n}\right|_{Xj} + \left.\frac{d^n\left(\varepsilon_n(x)\right)}{dx^n}\right|_{Xj}$$

$$D = \quad D_n \quad + \quad \mathcal{E}_n$$



Resultando

$$D_n = \left.\frac{d^n\left(P_n(x)\right)}{dx^n}\right|_{Xj} = \sum_{k=0,N} c_k \cdot f(x_k) = \sum_{k=0,N} c_k \cdot y_k = \vec{c}^{\,T} \cdot \vec{y}$$

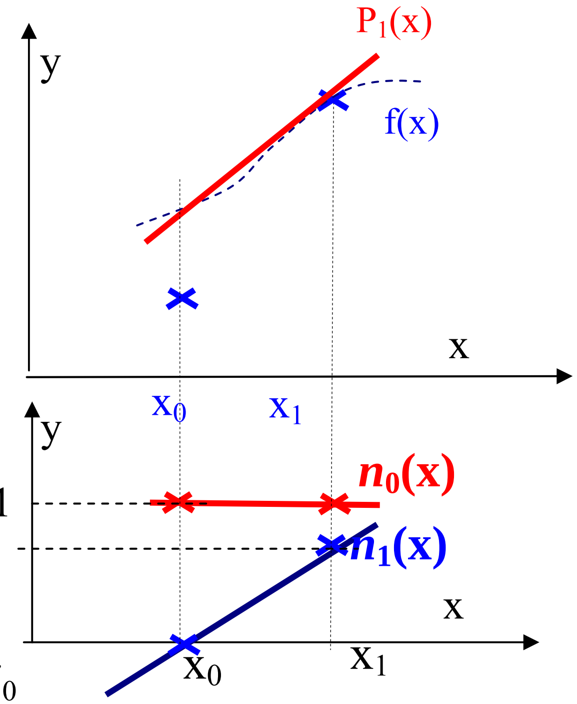
con el Error de Derivación dado por $\mathcal{E}_n = \left.\frac{d^n\left(\varepsilon_n(x)\right)}{dx^n}\right|_{Xj} = \frac{d^n\left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)\right)}{dx^n}$

Pregunta: ¿Qué cantidad de puntos se necesita para evaluar una derivada primera?, ¿y para una derivada segunda?

DERIVADA PRIMERA

Si f(x) está dada en forma discreta con 2 puntos *($x_0;y_0$), ($x_1;y_1$)* es posible interpolar f(x) colocando un polinomio de grado 1, usando polinomios de Newton, en la forma:

$$f(x)\cdot = a_0 + a_1\cdot(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}(x-x_0)\cdot(x-x_1)$$



La derivada primera de f(x) es

$$\frac{d(f(x))}{dx} = a_1 + \frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}\cdot\frac{d((x-x_0)\cdot(x-x_1))}{dx}$$

$$\frac{d(f(x))}{dx} = a_1 + \frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}\cdot[(x-x_1)+(x-x_0)]$$

Cuando se evalúa la derivada primera de f(x) en x_0 y en x_1 se obtienen:

Derivada Primera Adelante

$$\left.\frac{d(f(x))}{dx}\right|_{X=X0} = a_1 + \frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}\cdot\Delta x \quad con \quad a_1 = \frac{y_1-y_0}{\Delta x} \quad y \quad \Delta x = x_1 - x_0$$

Derivada Primera Atrás

$$\left.\frac{d(f(x))}{dx}\right|_{X=X1} = a_1 + \frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}\cdot\Delta x \quad con \quad a_1 = \frac{y_1-y_0}{\Delta x} \quad y \quad \Delta x = x_1 - x_0$$

Derivada Primera es constante en el intervalo; y el Error es lineal.

DERIVADA SEGUNDA

Si f(x) está dada en forma discreta con 3 puntos *(x_0;y_0), (x_1;y_1)* es posible interpolar f(x) colocando un polinomio de grado 2, usando polinomios de Newton, en la forma:

$$f(x)\cdot = a_0 + a_1\cdot(x-x_0) + a_2\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{(3)!}(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

La derivada segunda de f(x) es

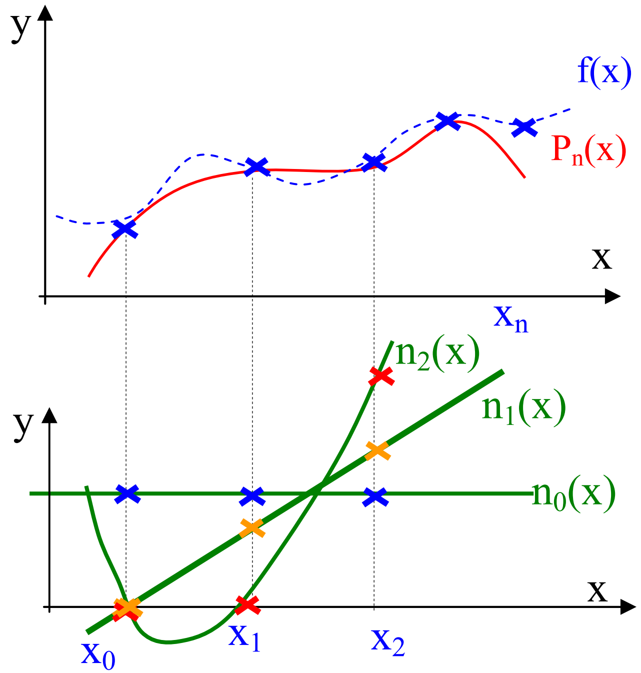
$$\frac{d^2(f(x))}{dx^2} = 2a_2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{(3)!}\cdot\frac{d^2((x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2))}{dx^2}$$

Con $2a_2 = 2\frac{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} - \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} = 2\cdot\frac{1}{2\Delta x}\cdot\frac{y_2-y_1}{\Delta x} - \frac{y_1-y_0}{\Delta x}$

Con lo que la derivadas segunda es

$$\left.\frac{d^2(f(x))}{dx^2}\right| = \frac{1}{\Delta x^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) \quad + \quad E_D(x)$$

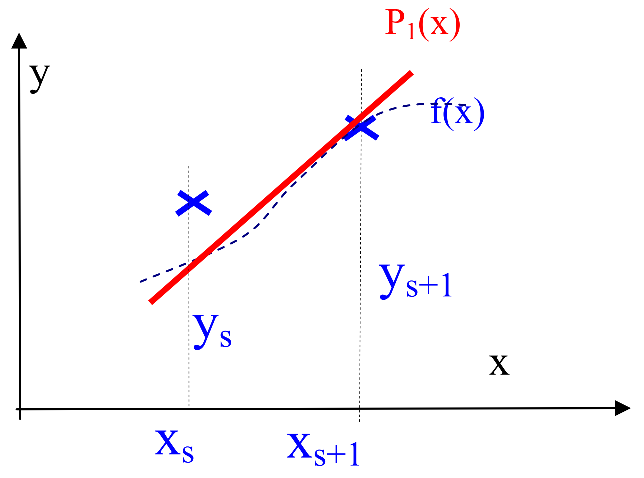
$$E_D(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{(3)!}\cdot\frac{d^2((x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2))}{dx^2}$$



Derivada Primera es constante en el intervalo; y el Error es lineal.
¿El error será igual a cero en alguno de los puntos datos?

DERIVADA PRIMERA EN BASE A SERIE DE TAYLOR

Si f(x) está dada en forma discreta con 2 puntos $(x_s;y_s)$, $(x_{s+1};y_{s+1})$ es posible considerar el desarrollo de Serie de Taylor de $y_{s+1}=f(x_{s+1})$ alrededor de x_s en la forma:



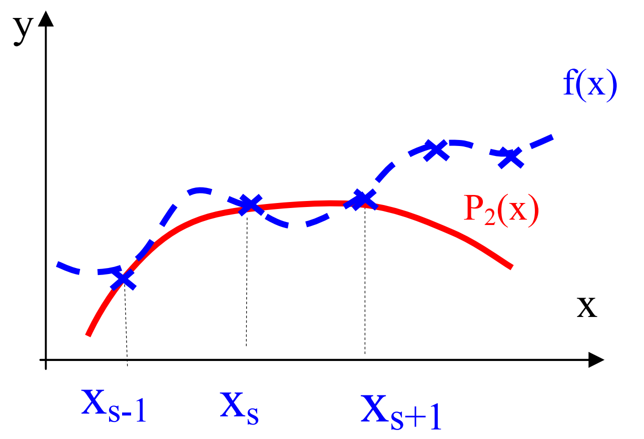
$$f_{s+1} = f_s + h\, f_s' + \frac{h^2}{2!} f_s'' + \frac{h^3}{3!} f_s''' + \frac{h^4}{4!} f_s^{\prime v} + O\left(h^5\right),$$

de donde se puede despejar la derivada primera en x_s

$$f\left(x_s + nh\right) = f\left(x_s\right) + n\,h\, f'\left(x_s\right) + \frac{(nh)^2\, f''\left(x_s\right)}{2!} + \frac{(nh)^3\, f'''\left(x_s\right)}{3!} + \frac{(nh)^4\, f^{\prime v}\left(x_s\right)}{4!} + O\left(h^5\right)$$

DERIVADA SEGUNDA EN BASE A SERIE DE TAYLOR

Si f(x) está dada en forma discreta con 3 puntos $(x_{s-1};y_{s-1})$ $(x_s;y_s)$, $(x_{s+1};y_{s+1})$ es posible considerar el desarrollo de Serie de Taylor de $y_{s\pm1}=f(x_{s\pm1})$ alrededor de x_s en la forma:



$$f_{s+1} = f_s + h\, f_s' + \frac{h^2}{2!}\, f_s'' + \frac{h^3}{3!}\, f_s''' + \frac{h^4}{4!}\, f_s^{\prime v} \ldots\ldots,$$

$$f_{s-1} = f_s - h\, f_s' + \frac{h^2}{2!}\, f_s'' - \frac{h^3}{3!}\, f_s''' + \frac{h^4}{4!}\, f_s^{\prime v} \ldots\ldots$$

y con ello se puede plantear en x_s la derivada segunda de f(x) como

$$f_s'' = \left[\alpha \cdot f_{s-1} + \beta \cdot f_s + \gamma \cdot f_{s+1}\right]$$

$$f(x_s + nh) = f(x_s) + n\,h\, f'(x_s) + \frac{(nh)^2\, f''(x_s)}{2!} + \frac{(nh)^3\, f'''(x_s)}{3!} + \frac{(nh)^4\, f^{\prime v}(x_s)}{4!} + O(h^5)$$