Doctorado en Ingeniería

Métodos Numéricos

Trabajo Práctico 6: Integración y Derivación

Problema 1:
Dada la función discreta cuyos datos están dados como:

x={	0;	0,1;	0,2;	0,3;	0,4;	0,5;	0,6;	0,7;	0,8}
f(x)={	1;	1,3;	1,5;	1,55;	1,61;	1,62;	1,65;	1,68;	1,69}

- Calcular un valor aproximado de la integral de f(x) con x=0 como límite inferior y x=0,8 como límite superior, usando la regla de Simpson compuesta y con un paso h de 0,1. Repita el cálculo para h=0,2. Resolver primero en forma manual. Luego, desarrollar un código que permita obtener la solución y graficar fx) entre x=0 y x=0,8.
- Aplique la regla de Richardson a los dos valores obtenidos anteriormente, para conseguir un valor mejorado de I.
- Calcular un valor aproximado de la integral de f(x) con x=0 como límite inferior y x=0,8 como límite superior, usando la regla de Trapecios compuesta y con un paso h de 0,1. Repita el cálculo para h=0,2. Resolver primero en forma manual. Luego, desarrollar un código que permita obtener la solución y graficar fx) entre x=0 y x=0,8.
- Aplique la regla de Richardson a los dos valores obtenidos anteriormente con la regla de Trapecios compuesta, para conseguir un valor mejorado de I.
- Comparar el orden de error obtenido con la regla de Richardson para los casos de Simpson compuesta y Trapecios compuesta.

Problema 2:
Utilizando cuadratura de Gauss-Legendre calcule el valor de la integral:

$$I = \int_{\pi}^{3\pi} \cos(x) \cdot sen(x)\, dx$$

- Realice el cálculo para dos y tres puntos de Gauss.
- Comparar los resultados obtenidos con las soluciones analíticas.

Problema 3:
Los métodos vistos de integración numérica se basan en la siguiente idea $I = I_n + E_n$. Además, se calcula la integral aproximada I_n según la fórmula:

$$I_n = \sum_{j=0}^{n} \omega_j f(x_j)\,.$$

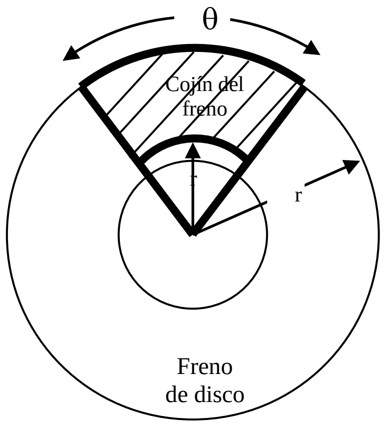
- Para las reglas de cuadratura de Newton-Cotes, ¿de qué manera se calculan los coeficientes ω_j?
- Para las reglas de cuadratura de Newton-Cotes, ¿qué puede decir de los valores x_j?
- Para las reglas de cuadratura de Gauss-Legendre, ¿qué puede decir de los valores x_j?
- ¿Hasta qué grado polinómico integra en forma exacta la cuadratura de Gauss-Legendre con tres puntos de Gauss? Justifique su respuesta, generalizando para n puntos.

Problema 4:
Para simular las características térmicas de los frenos de disco, Secrist y Hornbeck tuvieron que aproximar numéricamente la "temperatura exterior promediada del área", T, en el cojín del freno, basándose para ello en la ecuación:

$$T = \frac{\int_{r_e}^{r_0} T(r)\, r\, \theta_p\, dr}{\int_{r_e}^{r_0} r\, \theta_p\, dr}$$

donde r_e representa el radio donde comienza el contacto entre cojín y disco, r_0 representa el radio exterior de dicho contacto, θ_p representa el ángulo subtendido por los cojines del freno del sector y T(r) es la temperatura en cada punto del cojín, la cual se obtuvo numéricamente al analizar la ecuación del calor. Si r_e=0,308ft, r_0=0,478ft, θ_p=0,7051 radianes y si las temperaturas dadas en la tabla siguiente se calcularon en varios puntos del disco, obtenga una aproximación de T.

r [ft]	T(r) [°F]
0,308	640
0,325	794
0,342	885
0,359	943
0,376	1034
0,393	1064
0,410	1114
0,427	1152
0,444	1204
0,461	1222
0,478	1239



Problema 5:
Un volumen de revolución puede generarse al girar una curva y=f(x) dada, alrededor del eje x. Así es posible calcular el volumen de la forma:

$$V = \int_{x0}^{xn} \pi \cdot [f(x)]^2 dx,$$

siendo x_0 y x_n los límites inferior y superior respectivamente. La superficie lateral de dicho volumen se puede calcular mediante:

$$S = \int_{x0}^{xn} 2 \cdot \pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{[1 + \left(\frac{d(f(x))}{dx}\right)^2]}\, dx.$$

Empleando el método de Romberg obtenga las integrales anteriores para una esfera con R=1 y x entre [-1;1], siendo:

$$y = f(x) = \left(R^2 - x^2\right)^{1/2}$$

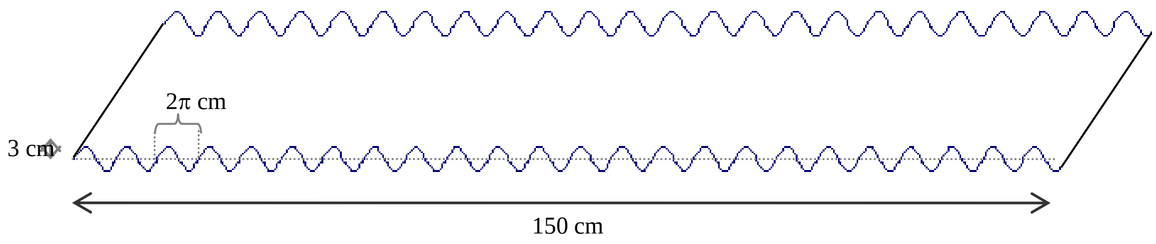
$$\frac{df}{dx} = -x \cdot \left(R^2 - x^2\right)^{1/2}$$

Utilice 16, 8, 4 y 2 subintervalos para calcular las correspondientes integrales por la regla de trapecios compuesta. Indique el orden del error para el resultado final hallado.

Problema 6:

Se tiene que construir una hoja corrugada usando una máquina que comprime una hoja plana de aluminio, logrando que su sección transversal tenga la forma de una onda de la función seno. Se necesita una hoja corrugada de un metro y medio de longitud, en la que cada onda tenga una amplitud de 3 cm (desde la línea central) y un periodo de 2π cm:

- Escriba una fórmula que represente a la función senoidal correspondiente a la sección de la hoja ya comprimida.
- Recuerde que la longitud de arco del gráfico de la función f entre x=a y x=b se halla calculando la integral $\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$. Halle la longitud que debe tener la hoja plana inicialmente, planteando y resolviendo la integral correspondiente. (Se recomienda tomar varios puntos, implementando la regla de integración en computadora).



Problema 7:

Dada la función discreta cuyos datos están dados como:

x={	0,1;	0,35;	0,6;	0,85;	1,1}
f(x)={	-1,60517019;	0,90035575;	1,97834875;	2,67496214;	3,19062036}

- Calcule una aproximación de la derivada primera de la f(x) en x=0,1. Use un paso h_1 tal que pueda tener datos para un paso $h_2 = 2h_1$.
- Calcule una aproximación de la derivada primera de la f(x) en x=0,1, con la misma fórmula de derivación utilizada en el inciso anterior. Use un paso $h_2 = 2h_1$, siendo h_1 el paso del inciso anterior.
- Realice extrapolación de Richardson a partir de los resultados de dos incisos anteriores. Resolver primero en forma manual.
- Luego, desarrollar un código que permita obtener la solución para los casos anteriores y que grafique fx) entre x=0,1 y x=1,1.
- Repita los tres incisos anteriores pero para el punto x=1,1.
- Calcular la función discreta f ’(x) derivada primera de la función dada asegurando un error del orden (h_1^2). Exprese mediante un operador matricial.
- Calcule la función discreta f ”(x) derivada segunda de la función dada asegurando un error del orden (h_1^2). Exprese mediante un operador matricial.
- Calcule las derivadas terceras de la función en el punto x=0,6 utilizando fórmulas centrales.

Problema 8:

Demostrar que la derivada primera hacia atrás al considerar tres puntos puede ser expresada como:

$$f_s' = \{[3/(2h)]\cdot f_s + [-4/(2h)]\cdot f_{s-1} + [1/(2h)]f_{s-2}\}$$

y que su error de truncamiento local es $Er = -\dfrac{h^2}{3} f_s'''$.