Ecuaciones Diferenciales con Valores Iniciales

Claudio Careglio

Métodos Numéricos, Doctorado en Ingeniería

Plan de la presentación I

- Explícito o Implícito
- Un paso o multipaso
- Predictor-Corrector

Forma genérica

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)) \quad f \epsilon \mathbb{R}$$
$$u(t_0) = U_0$$

Solución discreta se aproxima a la solución exacta:

$$U_k \approx u(t_k)$$

-Ejemplo:

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = 0 \quad A \epsilon \mathbb{R}$$
$$u(t_0) = U_0$$

-¿Cómo obtener solución?

- Solución en base a Serie de Taylor:

  En t_k se conoce u_k y sus derivadas:

$$u(t_k + \Delta k) = u(t_k) + \Delta t \left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t_k} + \frac{\Delta t}{2} \left.\frac{du^2(t)}{dt^2}\right|_{t_k} + \cdots$$

- Métodos basados en derivación numérica:

  Se consideran aproximaciones:

$$\left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t_n} = \frac{1}{\Delta t}\left(u_{n+1} - u_n\right) + O(\Delta t)$$

$$\left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t_n+1} = \frac{1}{\Delta t}\left(u_{n+1} - u_n\right) + O(\Delta t)$$

$$\left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t_n} = \frac{1}{2\Delta t}\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right) + O(\Delta t^2)$$

- Métodos basados en integración numérica:

Se considera la integral definida:

$$\int_{u_a}^{u_b} du = \int_a^b f(t, u(t))\, dt$$

$$\Rightarrow u_b - u_a = \sum_{k=1}^{NP} w_k f(t_k, u(t_k)) + O(\Delta t^{)}$$

$$u(t_k+\Delta k) = u(t_k) + \Delta t\, \left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t_k} + \frac{\Delta t}{2}\, \left.\frac{du^2(t)}{dt^2}\right|_{t_k} + \cdots$$

siendo en t_k conocidas:

$$\begin{aligned} & u_k \\ \left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t_k} &= f(t_k, u(t_k)) = f(t_k, u_k) = f_k \\ \left.\frac{du^2(t)}{dt^2}\right|_{t_k} &= \frac{\partial f(t,u(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t,u(t))}{\partial u}\, \left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t_k} \\ & \vdots \end{aligned}$$

-Solución de primer orden:

$$u(t_k+\Delta t) = u(t_k) + \Delta t\, f(t_k, u_k) + O(\Delta t^2)$$

-Solución de segundo orden:

$$u(t_k+\Delta t) = u(t_k) + \Delta t\, \left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t_k} + \frac{\Delta t^2}{2}\left.\left(\frac{\partial f(t,u(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t,u(t))}{\partial u}\, \frac{du(t)}{dt}\right)\right|_{t_k} + O(\Delta t^3)$$

-Método de Euler hacia adelante:

Considera que:

$$\left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t_n} = \frac{1}{\Delta t}\left(u_{n+1} - u_n\right) + O(\Delta t)$$

$$\left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t_n} = f(t_n, u_n)$$

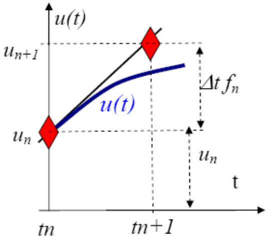
Luego:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t\, f(t_n, u_n) + O(\Delta t^2) \qquad \text{Explícito}$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

Con lo que el algoritmo sería:

$$\begin{cases} k_1 = \Delta t\, f(t_n, u_n) \\ u_{n+1} = u_n + k_1 \\ t_{n+1} = t_n + \Delta t \end{cases}$$



Ejemplo:

Identificar $f(x, y)$ y calcular la solución aproximada en $[0, 1]$ para la E.D.:

$$\frac{dy(x)}{dx} = 2y(x) - 2x - 1$$

con:

$y(x_0) = y_0$

siendo $x_0 = 0$ mientras que $y_0 = 2$. Usar un paso $h = 0,25$.

Calcular el error absoluto de la solución aproximada respecto a la solución exacta $y_{exac.}(x) = e^{2x} + x + 1$.

Solución:

$$\begin{cases} k_1 = \Delta x\, f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + k_1 \\ x_{n+1} = x_n + \Delta x \end{cases}$$

x_n	y_n	f_n	k_1	$E_{abs.} = \lvert y_{exac.}(x) - y_{aprox.}(x)\rvert$
0	2			
0,25				
0,5				
0,75				
1,0				

-Nota: influencia de h en la respuesta del problema.

Ejemplo:

Identificar $f(x, y)$ y calcular la solución aproximada en $[0; 0,6]$ para la E.D.:

$$\frac{dy(x)}{dx} + A\,y(x) = 0$$

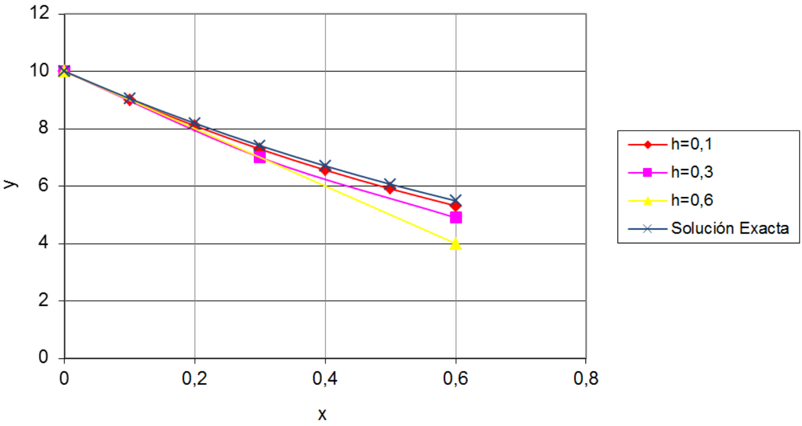
con:

$y(x_0) = y_0$

siendo $x_0 = 0$ mientras que $y_0 = 10$. Calcular para $A = 1$ y los pasos $h = 0,1$; $h = 0,3$ y $h = 0,6$.

Graficar las soluciones aproximadas junto con la solución exacta $y_{exac.}(x) = y_0\, e^{-A(x-x_0)}$.

Solución:


12
10
8
6
4
2
0
y
0
0,2
0,4
0,6
0,8
x
h=0,1
h=0,3
h=0,6
Solución Exacta

-Nota: problemas de estabilidad (Euler hacia adelante es condicionalmente estable).

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = 0 \qquad A \epsilon \mathbb{R}$$
$$u(t_0) = U_0$$

Comportamiento de la solución aproximada:

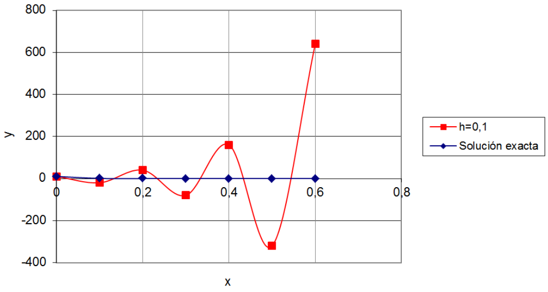
$$h > 2/A \qquad\qquad \boxed{h < 2/A}$$

Ejemplo.
Identificar $f(x, y)$ y calcular la solución aproximada en $[0; 0, 6]$ para la E.D.:

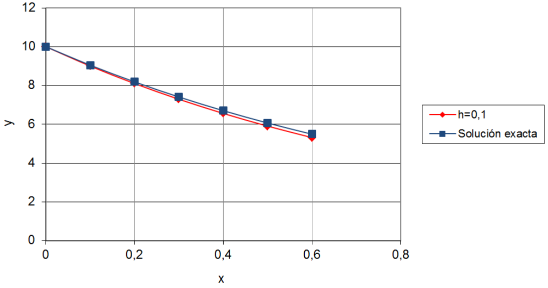
$$\frac{dy(x)}{dx} + A\,y(x) = 0$$

con:
$y(x_0) = y_0$
siendo $x_0 = 0$ mientras que $y_0 = 10$. Calcular para $A = 1$ y paso $h = 0, 1$.
Analizar el comportamiento de las soluciones aproximadas para $h > 2/A$ y $h < 2/A$.
Graficar las soluciones aproximadas junto con la solución exacta $y_{exac.}(x) = y_0\, e^{-A(x-x_0)}$.

Solución:


800
600
400
200
0
-200
-400
y
0
0,2
0,4
0,6
0,8
x
h=0,1
Solución exacta

(a) $h > 2/A$


12
10
8
6
4
2
0
y
0
0,2
0,4
0,6
0,8
x
h=0,1
Solución exacta

(b) $h < 2/A$

-Método de Euler hacia atrás:

Considera que:

$$\left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t_{n+1}} = \frac{1}{\Delta t}\left(u_{n+1} - u_n\right) + O(\Delta t)$$

$$\left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t_{n+1}} = f\left(t_{n+1}, u_{n+1}\right)$$

Luego:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t\, f\left(t_{n+1}, u_{n+1}\right) + O(\Delta t^2) \qquad \text{Implícito}$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

-Método del punto medio:

Considera que:

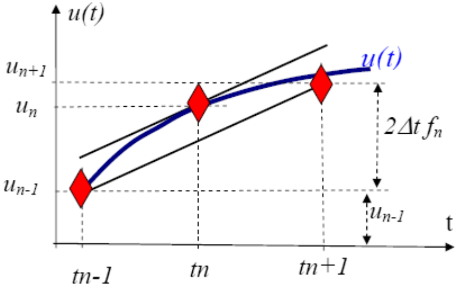
$$\left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t_n} = \frac{1}{2\Delta t}\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right) + O(\Delta t^2)$$

$$\left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t_n} = f(t_n, u_n)$$

Luego:

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2\Delta t\, f(t_n, u_n) + O(\Delta t^3) \qquad \text{Multipaso}$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$



Ejemplo:

Identificar $f(x, y)$ y calcular la solución aproximada en $[0, 1]$ para la E.D.:

$$\frac{dy(x)}{dx} = x^2 - y(x)$$

con $y(x_0 = 0) = 0,5$ y paso $h = 0,25$.

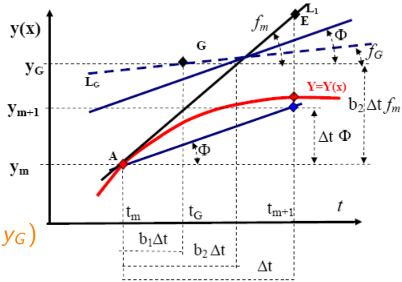
Solución:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2\Delta x\, f(x_n, y_n)$$
$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

x_m	y_m	f	$E_{abs.} = \lvert y_{exac.}(x) - y_{aprox.}(x)\rvert$
0	0,5	$f_0 = x_0^2 - y_0$	
0,25	¿cómo continúa?		
0,5			
⋮			

-Métodos de Runge-Kutta de segundo orden:

Dado (t_m, y_m) se busca calcular la nueva solución (t_{m+1}, y_{m+1}):



$$
\begin{aligned}
y_{m+1} &= y_m + \Delta t\, \Phi(t_m, y_m, \Delta t) \\
t_{m+1} &= t_m + \Delta t
\end{aligned}
$$

siendo:

$$
\begin{aligned}
\Phi(t_m, y_m, \Delta t) &= a_1\, f(t_m, y_m) + a_2\, f(t_G, y_G) \\
t_G &= t_m + b_1\, \Delta t \\
y_G &= y_m + b_2\, \Delta t\, f_m
\end{aligned}
$$

Expandiendo en S. de Taylor:

$$
f(t_G, y_G) = f(t_m, y_m) + (b_1\, \Delta t) \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t_m} + (b_2\, \Delta t\, f_m) \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{t_m} + O(\Delta t^2)
$$

$$
\Delta t\, \Phi(t_m, y_m, \Delta t) = \Delta t \left((a_1 + a_2) f(t_m, y_m) + a_2 (b_1\, \Delta t) \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t_m} + \right.
$$

$$
\left. + \, a_2 (b_2\, \Delta t\, f_m) \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{t_m} + O(\Delta t^2) \right)
$$

y sustituyendo la expresión anterior en y_{m+1} se obtiene:

$$y_{m+1} = y_m + \Delta t(a_1 + a_2) f(t_m, y_m) + a_2(b_1\, \Delta t^2)\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t_m} +$$

$$+ a_2(b_2\, \Delta t^2\, f_m)\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{t_m} + O(\Delta t^3)$$

Comparando con "solución por S. de Taylor", expresada como:

$$y(t_k+\Delta t) = y(t_k)+\Delta t\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t_k} + \frac{\Delta t^2}{2}\left.\left(\frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y}\,\frac{dy(t)}{dt}\right)\right|_{t_k} + O(\Delta t^3)$$

Para que los términos coincidan se debe cumplir que:

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 b_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 b_2 = \frac{1}{2}$$

con lo que se tienen 3 ecuaciones con 4 incógnitas. Arbitrariamente se adopta uno de ellos:

$$a_2 = \omega \neq 0$$

luego:

$$a_1 = 1 - \omega$$
$$b_1 = \frac{1}{2\omega}$$
$$b_2 = \frac{1}{2\omega}$$

En resumen:
Dado (t_m, y_m) se busca calcular la nueva solución (t_{m+1}, y_{m+1}):

$$
\begin{aligned}
t_{m+1} &= t_m + \Delta t \\
y_{m+1} &= y_m + \Delta t\, \Phi(t_m, y_m, \Delta t) \\
&= y_m + \Delta t\left[(1-\omega)\, f(t_m, y_m) + \omega\, f\left(\left(t_m + \frac{\Delta t}{2\omega}\right), \left(y_m + \frac{\Delta t}{2\omega} f(t_m, y_m)\right)\right)\right] + O(\Delta t^3)
\end{aligned}
$$

o en forma análoga:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \Delta t\, f(t_m, y_m) \\
k_2 &= \Delta t\, f(t_G, y_G) \\
t_G &= t_m + \frac{\Delta t}{2\omega} \\
y_G &= y_m + \frac{1}{2\omega} k_1 \\
y_{m+1} &= y_m + (1-\omega)\, k_1 + \omega k_2
\end{aligned}
$$

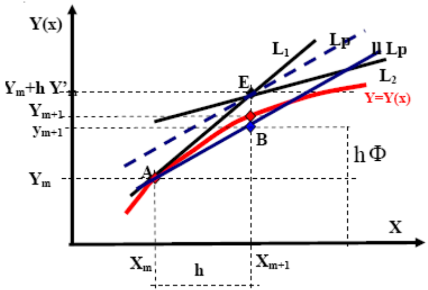
t_m	y_m	$f(t_m, y_m)$	k_1	t_G	y_G	$f(t_G, y_G)$	k_2

-Método de Euler mejorado ($\omega = 1/2$):

Dado (t_m, y_m) se busca calcular la nueva solución (t_{m+1}, y_{m+1}):

$$
\begin{aligned}
t_{m+1} &= t_m + \Delta t \\
k_1 &= \Delta t\, f(t_m, y_m) \\
k_2 &= \Delta t\, f(t_G, y_G) \\
t_G &= t_m + \Delta t \\
y_G &= y_m + k_1 \\
y_{m+1} &= y_m + \frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2
\end{aligned}
$$

Interpretación geométrica: en este método se promedian pendientes.



Ejemplo:

Identificar $f(x,y)$ y calcular la solución aproximada en $[0,1]$ para la E.D.:

$$\frac{dy(x)}{dx} = 2y(x) - 2x - 1$$

con $y(x_0 = 0) = 2$ y paso $h = 0,25$.

Calcular el error absoluto de la solución aproximada respecto a la solución exacta $y_{exac.}(x) = e^{2x} + x + 1$.

Solución:

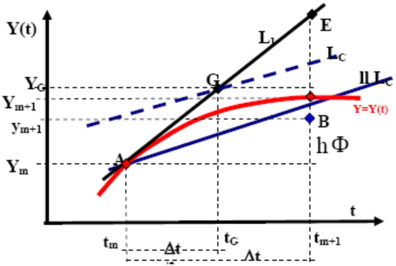
$$\begin{aligned} x_{m+1} &= x_m + \Delta x \\ k_1 &= \Delta x\, f(x_m, y_m) \\ k_2 &= \Delta x\, f(x_G, y_G) \\ x_G &= x_m + \Delta x \\ y_G &= y_m + k_1 \\ y_{m+1} &= y_m + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \end{aligned}$$

x_m	y_m	$f(x_m, y_m)$	k_1	x_G	y_G	$f(x_G, y_G)$	k_2	$E_{abs.} = \lvert y_{exac.}(x) - y_{aprox.}(x) \rvert$
0	2							
0,25								
$\vdots$								

-Método de Euler modificado ($\omega = 1$):
Dado (t_m, y_m) se busca calcular la nueva solución (t_{m+1}, y_{m+1}):

$$t_{m+1} = t_m + \Delta t$$
$$k_1 = \Delta t\, f(t_m, y_m)$$
$$k_2 = \Delta t\, f(t_G, y_G)$$
$$t_G = t_m + \frac{\Delta t}{2}$$
$$y_G = y_m + \frac{1}{2} k_1$$
$$y_{m+1} = y_m + k_2$$

Interpretación geométrica: en este método se promedian puntos.



Ejemplo:

Identificar $f(x, y)$ y calcular la solución aproximada en $[0, 1]$ para la E.D.:

$$\frac{dy(x)}{dx} = 2y(x) - 2x - 1$$

con $y(x_0 = 0) = 2$ y paso $h = 0,25$.

Calcular el error absoluto de la solución aproximada respecto a la solución exacta $y_{exac.}(x) = e^{2x} + x + 1$.

Solución:

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= x_m + \Delta x \\ k_1 &= \Delta x\, f(x_m, y_m) \\ k_2 &= \Delta x\, f(x_G, y_G) \\ x_G &= x_m + \frac{\Delta x}{2} \\ y_G &= y_m + \frac{1}{2} k_1 \\ y_{m+1} &= y_m + k_2 \end{aligned}$$

x_m	y_m	$f(x_m, y_m)$	k_1	x_G	y_G	$f(x_G, y_G)$	k_2	$E_{abs.} = \lvert y_{exac.}(x) - y_{aprox.}(x) \rvert$
0	2							
0,25								
$\vdots$								

-Métodos de Runge-Kutta de cuarto orden:

Dado (t_m, y_m) se busca calcular la nueva solución (t_{m+1}, y_{m+1}):

$$t_{m+1} = t_m + \Delta t$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{\Delta t}{6}\,[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] + O(\Delta t^5)$$

donde:

$$k_1 = f(t_m, y_m)$$

$$k_2 = f\left(t_m + \frac{\Delta t}{2}, y_m + \frac{\Delta t}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_m + \frac{\Delta t}{2}, y_m + \frac{\Delta t}{2} k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(t_m + \Delta t, y_m + \Delta t\, k_3\right)$$

Método de los trapecios:

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t))$$

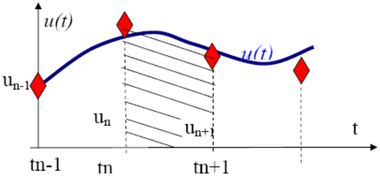
$$\int_{u_m}^{u_{m+1}} du = \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t, u(t))\, dt$$

$$\Rightarrow u_{m+1} - u_m = \frac{\Delta t}{2}\left[f(t_m, u_m) + f(t_{m+1}, u_{m+1})\right] + O(\Delta t^2)$$

$$\Rightarrow u_{m+1} = u_m + \frac{\Delta t}{2}\left[f(t_m, u_m) + f(t_{m+1}, u_{m+1})\right] + O(\Delta t^3)$$ Implícito, un paso

Comentarios adicionales:

- Solución de ecuación no lineal.
- Corrector iterativo de una predicción con algún método explícito



Método de Heun:

Método con esquema predictor-corrector donde:

Predictor : aproximación inicial con Euler hacia adelante:

$$u_{m+1}^{(0)} = u_m + k_{1\,m+1} = u_m + \Delta t\, f(t_m, u_m)$$

Corrector : aplicación iterativa del método implícito de los Trapecios:

$$u_{m+1}^{(i)} = u_m + \frac{\Delta t}{2}\left[f(t_m, u_m) + f(t_{m+1}, u_{m+1}^{(i)})\right] + O(\Delta t^3)$$

hasta:

$$\left|\frac{u_{m+1}^{(i)} - u_{m+1}^{(i-1)}}{u_{m+1}^{(i)}}\right| < \epsilon$$

Es un método implícito de un paso.

Ejemplo:

Identificar $f(x,y)$ y calcular la solución aproximada en $[0,1]$ para la E.D.:

$$\frac{dy(x)}{dx} = -x\,y(x)^2$$

con $y(x_0 = 0) = 2$ y paso $h = 0,25$. Para la fase correctora realizar 3 iteraciones.

Solución:

Predictor :

$$y_{m+1}^{(0)} = y_m + k_{1\,m+1} = y_m + \Delta t\, f(x_m, y_m)$$

Corrector :

$$y_{m+1}^{(i)} = y_m + \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i)})\right]$$

x_m	y_m	f	$\left\lvert\frac{y_{m+1}^{(i)} - y_{m+1}^{(i-1)}}{y_{m+1}^{(i)}}\right\rvert < \epsilon$
0	2	$-x_0 y_0^2$	–
x_1	$y_1^{(0)} = y_0 + hf_0$	$-x_1 y_1^{(0)2}$	
	$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(0)})\right]$	$-x_1 y_1^{(1)2}$	
	$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})\right]$	$-x_1 y_1^{(2)2}$	
	$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_2^{(0)})\right]$	$-x_1 y_1^{(3)2}$	
x_2	$y_2^{(0)} = y_1 + hf_1$		
	$\cdots$		

Ejemplo:

Identificar $\mathbf{f(x, y)}$ y calcular la solución aproximada en $[0, 1]$ para el sistema de E.D.:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = -10y_1(t) + 4y_2(t)$$
$$\frac{dy_2(t)}{dt} = -4y_1(t) + 0y_2(t)$$

con C.I.:

$$y(t_0 = 0) = 5$$
$$y(t_0 = 0) = 3$$

y paso $h = 0,01$. Encontrar la solución por los métodos de Euler, Euler mejorado y Euler modificado.
Calcular el error absoluto de la solución aproximada respecto a la solución exacta:

$$\mathbf{y}(t) = \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} e^{-2t} + \frac{14}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{Bmatrix} e^{-8t}$$

Solución:

a) Para calcular mediante el método de Euler:

$$\mathbf{y}^{(n+1)} = \mathbf{y}^{(n)} + \mathbf{k}_1 = \mathbf{y}^{(n)} + \Delta t\, \mathbf{f}(t^{(n)}, \mathbf{y}^{(n)})$$

entonces:

$$\begin{Bmatrix} y_1^{(n+1)} \\ \\ y_2^{(n+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1^{(n)} \\ \\ y_2^{(n)} \end{Bmatrix} + \Delta t \begin{Bmatrix} -10y_1^{(n)} + 4y_2^{(n)} \\ \\ -4y_1^{(n)} + 0y_2^{(n)} \end{Bmatrix}$$

b) Para calcular mediante el método de Euler mejorado ó modificado se tiene que:

$$\mathbf{k_1} = \Delta t\, \mathbf{f}(t_m, \mathbf{y}_m)$$
$$\mathbf{k_2} = \Delta t\, \mathbf{f}(t_G, \mathbf{y}_G)$$
$$t_G = t_m + \frac{\Delta t}{2\omega}$$
$$\mathbf{y}_G = \mathbf{y}_m + \frac{1}{2\omega}\mathbf{k}_1$$
$$\mathbf{y}_{m+1} = \mathbf{y}_m + (1-\omega)\, \mathbf{k}_1 + \omega \mathbf{k}_2$$

Ejemplo:

Dada la E.D. del péndulo simple:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

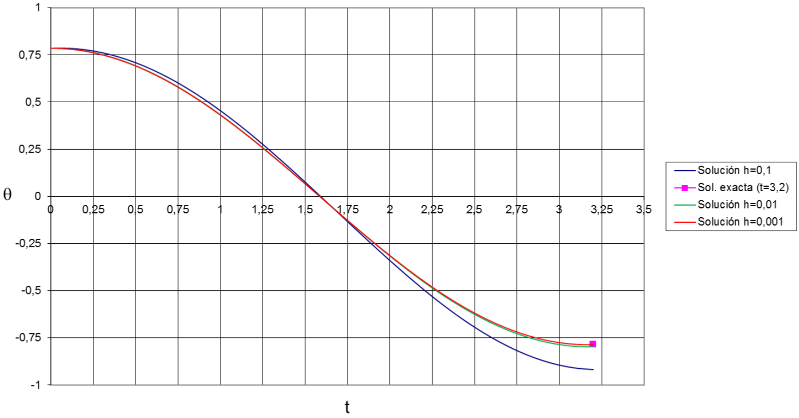
con C.I.:

$$\theta(t_0) = \theta_0$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t_0} = \beta_0$$

siendo $\theta(t)$ la posición angular medida respecto de la vertical, $\theta(t_0)$ la posición inicial y β_0 la velocidad inicial.

- Transformar la E.D. en un sistema de primer orden. Expresar los vectores $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y}(t_0)$ y $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$.
- Resolver con el método de Euler hacia adelante. Para ello considerar $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$; $\alpha(0) = 0$; $L = 10$; $g = 9,81$ y paso $h = 0,1$.
- Verificar que $\theta(t = 3,2) \approx -\frac{\pi}{4}$.


θ
t
1
0,75
0,5
0,25
0
-0,25
-0,5
-0,75
-1
0,25
0,5
0,75
1
1,25
1,5
1,75
2
2,25
2,5
2,75
3
3,25
3,5
Solución h=0,1
Sol. exacta (t=3,2)
Solución h=0,01
Solución h=0,001

Dado el sistema:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}(t) \tag{1}$$

$$\text{con C.I.:} \quad \mathbf{u}(t_0) \quad \dot{\mathbf{u}}(t_0) \tag{2}$$

se puede aproximar $\dot{\mathbf{u}}(t)$ y $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ mediante derivadas numéricas centrales:

$$\mathbf{M}\frac{1}{h^2}\left(\mathbf{u}(t-h) - 2\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t+h)\right) + \mathbf{C}\frac{1}{2h}\left(-\mathbf{u}(t-h) + \mathbf{u}(t+h)\right) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}(t) \tag{3}$$

donde $h = \Delta t$. Agrupando:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{h^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2h}\mathbf{C}\right)}_{=\mathbf{A}}\mathbf{u}(t+h) = \mathbf{R}(t) - \underbrace{\left(\mathbf{K} - \frac{2}{h^2}\mathbf{M}\right)}_{=\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) - \underbrace{\left(\frac{1}{h^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2h}\mathbf{C}\right)}_{=\mathbf{D}}\mathbf{u}(t-h) \tag{4}$$

$$\boxed{\mathbf{u}(t+h) = \mathbf{A}^{-1}\left[\mathbf{R}(t) - \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{D}\mathbf{u}(t-h)\right]} \tag{5}$$

En $t = t_0$:

$$\mathbf{u}(t_0 + h) = \mathbf{A}^{-1}\left[\mathbf{R}(t_0) - \mathbf{B}\mathbf{u}(t_0) - \mathbf{D}\mathbf{u}(t_0 - h)\right] \tag{6}$$

en donde se puede emplear la aproximación de $\mathbf{u}(t_0 - h)$ por Serie de Taylor:

$$\mathbf{u}(t_0 - h) = \mathbf{u}(t_0) - h\dot{\mathbf{u}}(t_0) + \frac{1}{2}h^2\ddot{\mathbf{u}}(t_0) \tag{7}$$

La $\ddot{\mathbf{u}}(t_0)$ en (7) se puede calcular a partir de (1) en $t = t_0$:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t_0) = \mathbf{M}^{-1}\left[\mathbf{R}(t_0) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t_0) - \mathbf{K}\mathbf{u}(t_0)\right] \tag{8}$$

En $t > t_0$:

$$\boxed{\mathbf{u}(t_k + h) = \mathbf{A}^{-1}\left[\mathbf{R}(t_k) - \mathbf{B}\mathbf{u}(t_k) - \mathbf{D}\mathbf{u}(t_k - h)\right]} \tag{9}$$

Ejemplo:
Encontar $\mathbf{u}(t)$ para el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \dot{u}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5e^t + 8e^{2t} + cos(t) \\ -8e^{2t} + 4e^t \\ -cos(t) - 3\,sin(t) + e^t \end{Bmatrix}$$

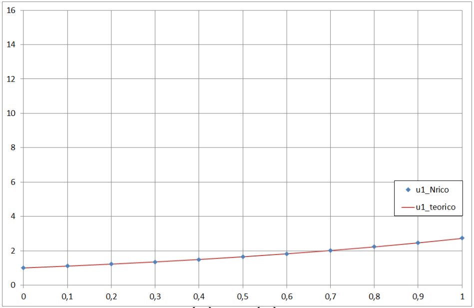
con C.I.:

$$\begin{Bmatrix} u_1(t_0) \\ u_2(t_0) \\ u_3(t_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t_0) \\ \dot{u}_2(t_0) \\ \dot{u}_3(t_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

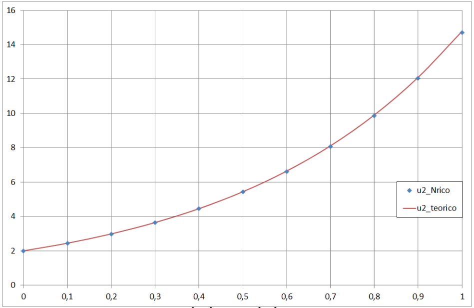
siendo $t_0 = 0$ y $\Delta t = 0,1$.

Solución analítica:

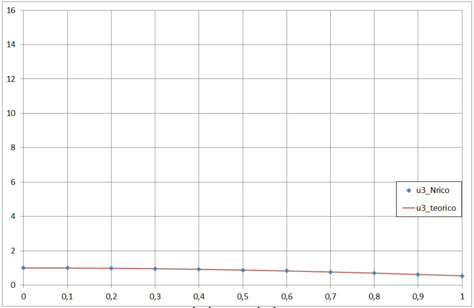
$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^t \\ 2e^{2t} \\ cos(t) \end{Bmatrix}$$


u1_Nrico
u1_teorico
0
2
4
6
8
10
12
14
16
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1

(c) $u_1(t)$


u2_Nrico
u2_teorico
0
2
4
6
8
10
12
14
16
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1

(d) $u_2(t)$



(e) $u_3(t)$